Proseminar Partielle Differentialgleichungen 2

Gerald Teschl

SS2009

Bemerkung: Die meisten Beispiel sind aus dem Buch von L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 1998.

1. Zeige dass $C^{k,\gamma}(U)$ ein Banachraum ist.
2. Zeige die Interpolationsungleichung
   $$\|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} \le \|u\|_{C^{0,\beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0,1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$
   für $0 < \beta < \gamma \le 1$. (Hinweis: Beginne mit der entsprechenden Ungleichung fuer $[u]_{C^{0,\gamma}(U)}$. O.B.d.A. kann $\|u\|_\infty = 1$ gewählt werden. Verwende die Binomische Reihe und $a^\alpha b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b$ für alle $a, b \ge 0$ und $0 \le \alpha \le 1$.)
3. Leite die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung
   $$\|f\,g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$
   aus der Hölder-Ungleichung ($r = 1$) her.
4. Es sei $0 < \theta < 1$. Zeige: Falls $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$, dann ist $f \in L^p$ und
   $$\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^\theta \|f\|_{p_2}^{1-\theta},$$
   mit $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$.
5. Fine eine Nullfolge f_n in $L^p([0,1], dx)$ für die $f_n(x) \to 0$ *nicht* für a.e. $x \in [0,1]$ gilt. (Hinweis: Jedes $n \in \mathbb{N}$ kann eindeutig als $n = 2^m + k$ mit $0 \le m$ und $0 \le k < 2^m$ geschrieben werden. Nun betrachte die charakeristischen Funktionen der Intervalle $I_{m,k} = [k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$.)
6. Eine Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{C}$ heisst absolut stetig, falls
   $$u(x) = u(0) + \int_0^x v(t)dt$$
   mit $v \in L^1(0,1)$.

   Zeige u ist genau dann absolut stetig, wenn $u \in W^{1,1}(0,1)$ und es gilt $u' = v$ in diesem Fall. Ausserdem gilt $u \in W^{1,p}(0,1)$ genau dann wenn $v \in L^p(0,1)$ ist.

Anleitung:
1) Für absolut stetige Funktionen gilt die Regel der partiellen Integration:

$$\int_0^1 u_1(t)v_2(t)dt = u_1(1)u_2(1) - u_1(0)u_2(0) - \int_0^1 v_1(t)u_2(t)dt.$$

(Hinweis: $\int_0^1 (u_1(t)v_2(t) + v_1(t)u_2(t))dt = \int_0^1 \int_0^1 v_1(s)v_2(t)ds\,dt + \cdots$ wegen $\int_0^1 \int_0^s ds\,dt = \int_0^1 \int_t^1 dt\,ds$)
2) $\int_0^1 u(t)\phi'(t)dt = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(0,1)$ genau dann wenn f konstant ist.
(Hinweis: Sei $\phi_0 \in C_c^\infty(0,1)$ mit $I(\phi_0) = \int_0^1 \phi_0(t)dt = 1$. Dann kann jedes $\phi \in C_c^\infty(0,1)$ als $\phi(t) = \Phi'(t) + I(\phi)\phi_0(t)$ mit $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds - I(\phi)\int_0^t \phi_0(s)ds$ geschrieben werden. Nun verwende man diese Darstellung um $\int_0^1 u(t)\phi(t)dt$ auszuwerten.)

7. Zeige dass für $u \in W^{1,p}(0,1)$ die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \le \left(\int_0^1 |u'(t)|^p dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}$$

gilt.

(Hinweis: Hölderungleichung.)

8. Zeige dass $u \in H^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

erfüllt.

(Hinweis: $|u(x)|^2 = |u(0)|^2 + 2\int_0^x \mathrm{Re}(\overline{u(t)}u'(t))dt$ — das folgt da absolut stetige Funktionen die Regel der partiellen Integration (auf einem beliebigen Intervall) erfüllen und damit auch die Produktregel.)

9. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $U \subset\subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ mit V_i offen. Zeige, dass es eine glatte (C^∞) Zerlegung der Eins $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ gibt:

$$\begin{cases} 0 \le \zeta_i \le 1, \quad \mathrm{supp}(\zeta_i) \subset V_i, \quad 1 \le i \le N, \\ \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1 \text{ auf } U. \end{cases}$$

(Hinweis: Beginne mit einer stetigen Zerlegung der Eins.)

10. Zeige mittels partieller Integration, dass

$$\int_U |Du|^2 dx \le C \left(\int_U |u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_U |D^2u|^2 dx\right)^{1/2}$$

für alle $u \in C_c^\infty(U)$ gilt. Zeige durch Approximation, dass die Unlgeichung für $u \in H_0^2(U)$ gültig bleibt.

11. Es sei U zusammenhängend und $u \in W^{1,p}(U)$ erfülle

$$Du = 0 \quad \text{a.e. in } U.$$

Zeige u ist konstant (a.e.) in U.

(Hinweis: Theorem 1 aus Abschnitt 5.3.1.)

12. Zeige, dass für $n > 1$ die unbeschränkte Funktion $u(x) = \log\log(1 + \frac{1}{|x|})$ in $W^{1,n}(U)$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\}$, liegt.

13. Es sei $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit F' beschränkt und $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeige, falls $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$, dann ist auch $v = F(u) \in W^{1,p}(U)$ und es gilt
$$v_{x_i} = F'(u) u_{x_i}.$$
(Hinweis: Es gilt $|F(x)| \le |F(0)| + L|x|$ mit $L = \sup F'(x)$. Konvergente Folgen in L^p haben punktweise konvergente Teilfolgen.)

14. Es sei U beschränkt. Zeige, falls $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$, dann ist auch $|u| \in W^{1,p}(U)$.
(Hinweis: $|u| = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$, $F_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon^2 + x^2}$.)

15. Leite die iterierte Hölder-Ungleichung
$$\|f_1 \cdots f_m\|_r \le \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}, \qquad \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r},$$
aus der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung ($m = 2$) her.

16. Zeige dass für $1 \le p_0 \le p$
$$\|u\|_{L^{p_0}(U)} \le \mathrm{Vol}(U)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(U)}$$
gilt. (Hinweis: Hölder-Ungleichung.)

17. Die Sobolev-Räume $H^s(\mathbb{R}^n)$ können equivalent mit Hilfe der Fouriertransformation als
$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) | (1 + |y|^2)^{s/2} \hat{u}(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$
definiert werden. Die Norm aus dem Buch von Evans ist equivalent zur Norm
$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |y|^2)^{s/2} \hat{u}(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$
Zeige diese Aussage exemplarisch für $n = 2$ und $s = 1, 2$ (Hinweis: Die Fouriertransformation ist unitär. Wie verhalten sich Ableitungen unter der Fouriertransformation?).

18. Ist $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ wie im letzten Beispiel definiert, so gilt
$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \sqrt{\frac{\alpha(n)}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(s - \frac{n}{2})}{2\Gamma(s)}} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad s > \frac{n}{2}.$$

19. Es sei
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu.$$
Zeige, dess es eine Konstante $\mu > 0$ gibt, so dass die zugehörige Bilinearform $B_\mu[u, v] = B[u, v] + \mu(u, v)$ die Voraussetzungen des Lax–Milgam–Theorems in $H^1_0(U)$ erfüllt falls
$$c(x) \ge -\mu, \qquad (x \in U).$$

20. Was passiert wenn man im letzten Beispiel $H_0^1(U)$ furch $H^1(U)$ ersetzt?

21. Eine Funktion $u \in H_0^2(U)$ ist eine schwache Lösung des folgenden Randwertproblems für die Biharmonische-Gleichung

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + u = f & \text{in } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

falls

$$\int_U (\Delta u \Delta v + uv)\, dx = \int_U f v\, dx$$

für alle $v \in H_0^2(U)$.

Zeige, dass für gegebenes $f \in L^2(U)$, eine eindeutige schwache Lösung von (*) existiert.

22. Präsentiere den Beweis der *Fredholm'schen Alternative* (Theorem 5 in Appendix D.5).

23. Es sei $u(t)$ eine schwache Lösung des parabolischen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{on } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei die zu L gehörige Bilinearform $B[u, u; t] \geq \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(U)}$ erfülle.

Zeige

$$\|u(t)\|_{L^2(U)} \leq \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \|g\|_{L^2(U)}.$$

(Hinweis: Theorem 3 in Abschnitt 5.9.2.)