Analysis II

Vortragender: Gerald Teschl

Mitschrift von Melita Šuput

a1201272

Sommersemester 2014

Quellen: Taylor: Foundations of Analysis

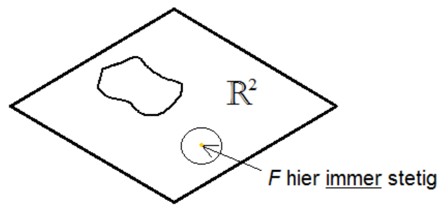
8 Functions on Euclidian Space

8.1 Continuous Functions of Several Variables

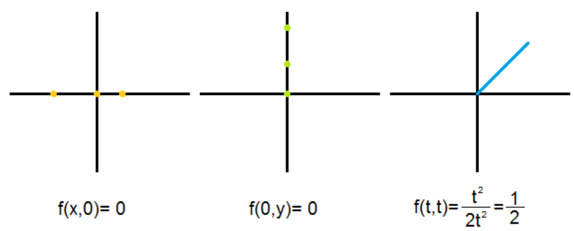
Definition 8.1.1.: Sei $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, F heißt stetig bei $a \in D$ falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \|F(x) - F(a)\| \leq \epsilon$ falls $\|x - a\| < \delta\ x \in D$. F heißt stetig auf D, falls F stetig für alle $a \in D$.

Beispiel: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x) = \begin{matrix} 1 & x \in B_1(0) \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \rightsquigarrow$ im $\mathbb{R}^2$ unstetig!

D:



Beispiel: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unstetig



$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

$f(0,y) = 0 = f(x,0),\ f(t,t) = \frac{t^2}{\sqrt{2 \cdot t^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{2}|t|} = \frac{|t|}{\sqrt{2}} \to 0$ für $t \to 0$

$\left| \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \epsilon$ falls $\sqrt{x^2+y^2} < \delta \rightsquigarrow \frac{|x \cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ ■

Satz 8.1.5.: Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}^q$ ist genau dann stetig, falls alle Komponenten $F(x) = (f_1(x), ..., f_q(x))$ stetig sind.

Beweis: $| f_j(x) - f_j(y) | \leq \|F(x) - F(y)\| \leq \sum_{k=1}^{q} | f_k(x) - f_k(y) |$ ■

Satz 8.1.6.: Es sei $F : D \to \mathbb{R}^q$ und $a \in D \subseteq \mathbb{R}^p$, dann ist F stetig bei $a \Leftrightarrow$ für alle Folgen $x_n \to a$ gilt $F(x_n) \to F(a)$.

Bemerkung: $\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(\lim_{n \to \infty} x_n)$

Satz 8.1.7.: $F,\ G : D \to \mathbb{R}^q,\ h : D \to \mathbb{R}$ stetig auf $D \subseteq \mathbb{R}^p$, dann gilt:

(i) $F \pm G$ stetig

(ii) $h \cdot F$ stetig

(iii) $F \cdot G$ stetig

Beispiel: $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ $(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)}_{D}$ stetig auf D

$f(x,y) = x,\ h(x) = x,\ g(x,y) = 1\}\ f(x,y) = h(x) \cdot g(x,y)$ x stetig, y stetig

$\left.\begin{matrix} l(x,y) = x^2+y^2 & \text{stetig} \\ k(x,y) = \frac{1}{x} & \text{stetig bei } x \neq 0 \end{matrix}\right\} k(l(x,y)) = \frac{1}{x^2+y^2}$ stetig für $x^2 + y^2 \neq 0$

Satz 8.1.8.: Sei $G : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p,\ F : E \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$, sei $a \in D \cap G^{-1}(E)$ und G stetig bei a und F stetig bei $G(a)$, dann ist $F \circ G$ stetig bei a.

Definition 8.1.9.: Sei $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ und a ein Grenzpunkt von D. Dann heißt b der Grenzwert F in a falls $\forall\ \epsilon > 0$

$\exists\ \delta > 0 : \|F(x) - b\| < \epsilon$ falls $x \in D$ und $0 < \|x - a\| < \delta$.

Beispiel: $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ $\quad D = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ Grenzwert bei $(0,0)$ existiert nicht

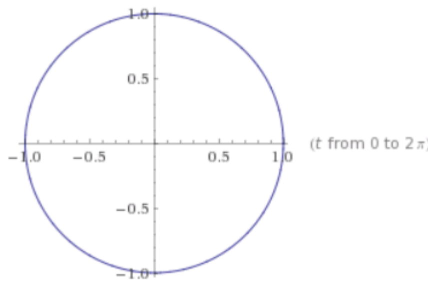
$$\left.\begin{array}{ll} \vec{a_n}=(0,\frac{1}{n})\to(0,0) & f(\vec{a_n})=0\to 0 \\ \vec{a_n}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0) & f(\vec{a_n})=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2} \end{array}\right\} \neq$$

$f(x,y) = \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Grenzwert bei $(0,0)$ ist 0

Kurven

Sei $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 1$ dann heißt γ eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^d$.

Beispiel: $\gamma : I = [0, 2 \cdot \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ "entartete Kurve"

Flächen

$F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ heißt parametrisierte Fläche.

Beispiel: $F(\theta, \phi) = (cos\theta \cdot cos\phi, sin\theta \cdot cos\phi, sin\phi) \quad \theta \in [0, 2 \cdot \pi),\ \phi \in [0, \pi]$

$G(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \quad \phi \in [0, \pi]$ (nur obere Hälfte)

8.2 Eigenschaften von stetigen Funktionen

$F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ stetig bei $x \in D$ falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : F(y) \in B_\epsilon(F(x))$ für alle $y \in B_\delta(x) \cap D$. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :$ $F^{-1}(B_\epsilon(F(x)) \supseteq B_\delta(x) \cap D$

Satz 8.2.1.: Sei $F : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, dann ist F genau dann stetig, wenn das Urbild jeder $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{offenen}}{\text{abgeschlossenen}}$ Menge relativ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{offen}}{\text{abgeschlossen}}$ ist.

Beweis: Angenommen F stetig und U offen $\overset{\text{z.z.}}{\Rightarrow}$ $F^{-1}(U)$ offen

Sei $x \in F^{-1}(U) \Rightarrow y \in F(x) \in U \underset{\text{offen}}{\overset{\text{da } U}{\Longrightarrow}} \exists\ \epsilon : B_\epsilon(F(x)) \subset U \Rightarrow \exists\ \delta > 0 : B_\delta(x) \cap D \subseteq F^{-1}(U) \Rightarrow x$ innerer Punkt von $F^{-1}(U) \subseteq D \Rightarrow F^{-1}(U)$ relativ offen

Angenommen Urbilder von offenen Mengen relativ offen $\overset{\text{z.z.}}{\Rightarrow}$ stetig

Sei $x \in D$ und $\epsilon > 0 \Rightarrow B_\epsilon(F(x))$ offen $\Rightarrow F^{-1}(B_\epsilon(F(x)))$ ist relativ offen $\Rightarrow\ \exists\ \delta > 0 : B_\delta(x) \cap D \subseteq F^{-1}(B_\epsilon(F(x))) \Rightarrow F$ stetig bei x. ■

Beispiel: $f(x) = 0$

Satz 8.2.3.: Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ und $F : K \to \mathbb{R}^q$ mit K kompakt und F stetig, dann ist $F(K)$ kompakt.

Beweis: Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $F(K) \Rightarrow \{V_\alpha = F^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A'}$ ist offene Überdeckung von K ■

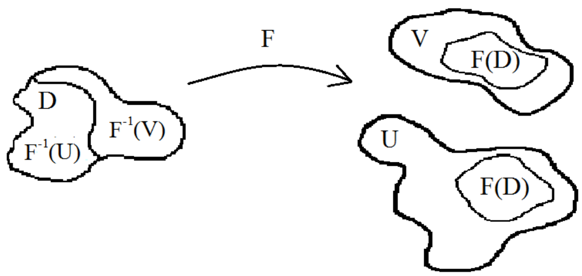
$M \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt beschränkt falls $\exists\ N > 0 : \|x\| \leq N\ \forall\ x \in M\ (M \subseteq B_N(0))$.

Satz 8.2.4.: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und $F : K \to \mathbb{R}^q$ stetig, dann nimmt $\|F(x)\|$ ein Maximum auf K an.

Beweis: $F(K)$ kompakt $\Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow \underset{x\in K}{sup}\|F(x)\| = M < \infty \Rightarrow y_n = F(x)$ mit $\|y_n\| \to M \overset{\text{Bolzano}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}} \exists$ Teilfolge $y_{n_m} \to y$ (mit $\|y\| = M$) und $x \in F(K)$ (da $F(K)$ abgeschlossen) $\Rightarrow \ \exists\, x : F(x) = y \Rightarrow \|F(x)\| = M$ ∎

Korollar 8.2.5.: Sei K kompakt und $F : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt F auf K ein Maximum und ein Minimum an.

Satz 8.2.7.: Sei $F : D \to \mathbb{R}^q$ stetig und $D \subseteq \mathbb{R}^p$ sei zusammenhängend, dann ist $F(D)$ zusammenhängend.



Beweis: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und disjunkt ($U \cap V = \phi$), $F(D) \subseteq U \cup V$; $F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(V)$ relativ offen und disjunkt mit $F^{-1}(U) \cup F^{-1}(V) = D$. Da D zusammenhängend ist, muss $F^{-1}(U) = \phi$ oder $F^{-1}(V) = \phi$ sein. o.B.d.A. $F^{-1}(U) = \phi \Rightarrow U \cap F(D) = \phi \Rightarrow F(D)$ ist zusammenhängend. ∎

Korollar 8.2.8.: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subseteq \mathbb{R}^p$ zusammenhängend, dann ist $f(D)$ ein Intervall.

Beweis: Nach Satz 7.5.4. sind die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle. ∎

Beispiel: $a, b \in D \Rightarrow [f(a),\ f(b)] \subseteq f(D)$

Satz 8.2.9.: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^q$ und $x, y \in E$ die mit einer stetigen Kurve $\gamma : [a, b] \to E$ verbunden werden können, dann liegen x, y in der gleichen Zusammenhangskomponente.

Beweis: $\gamma\ [a, b] \to E$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y \Rightarrow \gamma([a, b])$ ist zusammenhängend. ∎

Beispiel: Π[1] $= \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist zusammenhängend.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 8.2.11.: Sei $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dann heißt F gleichmäßig stetig, falls $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \|F(x) - F(y)\| < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$.

Satz 8.2.12.: Sei $F : K \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ stetig mit K kompakt. Dann ist F gleichmäßig stetig.

Beweis: geg. sei $\epsilon > 0$. Für beliebige $x \in K$ existiert ein $\delta(x)$ mit $\|F(x) - F(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$ für $y \in K$ mit $\|y - x\| < \delta(x)$. Betrachte $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\}_{x\in K}$ offene Überdeckung von $K \Rightarrow\ \exists\, \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $B_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{\delta(x_n)}{2}}(x_n) \supseteq K$. Setze $\rho := \underset{i=1,\ldots,n}{MIN} \frac{\delta(x_i)}{2}$ seien $x, y \in K$ (beliebig) mit $\|x - y\| < \rho \Rightarrow x \in B_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j)$ für ein x_j. $\|y - x_j\| = \|y - x + x - x_j\| \leq \underbrace{\underbrace{\|y - x\|}_{<\rho} + \underbrace{\|x - x_j\|}_{<\frac{\delta(x_j)}{2}}}_{<\delta(x_j)}$

falls $\|y - x\| < \rho$. Dann gilt $\|F(x) - F(y)\| \leq \underbrace{\|F(x) - F(x_j)\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\|F(x_j) - F(y)\|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$ ∎

Satz 8.2.13.: Es sei $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ gleichmäßig stetig mit D beschränkt genau dann, wenn F stetig auf $\overline{D}$ fortgesetzt werden kann.

Beweis: Sei F gleichmäßig stetig. Dann gilt $\{x_n\}$ Cauchy-Folge in $D \Rightarrow \{F(x_n)\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^q$. Sei $x \in \overline{D} \Rightarrow$ es existiert eine Folge $x_n \in D$ mit $x_n \to x$. Nach $\{x_n\}$ Cauchy-Folge in $D \Rightarrow \{F(x_n)\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^q$ ist $F(x_n)$ eine Cauchy-Folge und hat somit einen Grenzwert y. Definiere $\overline{F}(x) = y$. Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Folge! Per Konstruktion $\overline{F}(x_n) \to \overline{F}(x)$ für alle Folgen $x_n \to x$ in $\overline{D} \Rightarrow \overline{F}$ stetig. ∎

[1] Einheitskreis

8.3 Funktionenfolgen

Definition 8.3.1.: Sei F_n eine Folge von Funktionen mit $D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ und $F : D \to \mathbb{R}^q$. Dann konvergiert F_n gleichmäßig gegen F, falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} : \|F_n(x) - F(x)\| < \epsilon\ \forall\ n > N\ \forall\ x \in D$ und $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} : \|F_n - F\|_D < \epsilon\ \forall\ n > N\ \|F_n - F\|_D \to 0$.

Satz 8.3.2.: Sei F_n eine Folge von Funktionen mit $D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ und $F : D \to \mathbb{R}^q$. Dann konvergiert $F_n \to F$ gleichmäßig, falls es eine Nullfolge b_n gibt mit $\|F_n(x) - F(x)\| \leq b_n$.

Beispiel: $F_n(x,y) = (x^2+y^2)^n\ \overline{B_r(0,0)} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Für $r < 1 :\ \|F_n(\vec{x}) - F(\vec{x})\| =\mid (x^2+y^2)^n - 0 \mid \leq r^{2\cdot n} \to 0 \Rightarrow F_n \to F$ gleichmäßig auf $\overline{B_r(0,0)}$.

Für $r = 1 :\ \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow F_n(x,y) = 1$

$$F_n(x,y) \to F(x,y) = \begin{cases} 0 & \|(x,y)\|<1 \\ 1 & \|(x,y)\|=1 \end{cases}$$

Satz 8.3.4.: Es konvergiere $F_n \to F$ gleichmäßig. Sind alle F_n stetig, so ist auch F stetig.

Beispiel: $F_n(x,y) = \left\{\frac{x^2-n\cdot y}{1+n\cdot y^2},\ \frac{n\cdot x}{1+n\cdot x^2}\right\}$

$$\frac{x^2-n\cdot y}{1+n\cdot y^2} = \frac{\frac{x^2}{n}-y}{\frac{1}{n}+y^2} \to \begin{cases} -\frac{1}{y} & y\neq 0 \\ x^2 & y=0 \end{cases} \qquad \frac{n\cdot x}{1+n\cdot x^2} = \frac{x}{\frac{1}{n}+x^2} \to \begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$F_n(x,y) = \begin{cases} (-\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}) & x\neq 0,\ y\neq 0 \\ (-\frac{1}{y},\ 0) & x=0,\ y\neq 0 \\ (x^2, \frac{1}{x}) & x\neq 0,\ y=0 \\ (0,0) & x=0,\ y=0 \end{cases}$$

Definition 8.3.6.: Eine Funktionenfolge ist gleichmäßig Cauchy, falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} : \|F_n(x) - F_m(x)\| < \epsilon$ $\forall\ n,m \geq N,\ \forall\ x \in D$.

Satz 8.3.7.: F_n gleichmäßig Cauchy $\Leftrightarrow F_n \to F$ gleichmäßig.

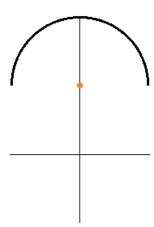
Beweis: F_n Cauchy-Folge bezüglich Sup Norm $\Leftrightarrow F_n$ gleichmäßig Cauchy-Folge $\Rightarrow F_n \overset{GLM}{\longrightarrow} F \Leftrightarrow \|F_n - F\|_D \to 0$ ■

The Sup Norm

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und jede stetige Funktion $F : D \to \mathbb{R}^q$ ist beschränkt. Dann gilt: $\|F\|_D := \underset{x\in D}{sup}\|F(x)\|$ wobei $\underset{x\in D}{sup}\|F(x)\|$ endlich ist und $\|F(x)\|$ diesen Wert in D annimmt.

Beispiel: $\gamma(t) = (cos(t), 1+sin(t)),\ \gamma : D = [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\|\gamma(t)\|^2 = cos(t)^2 + (1+sin(t))^2 = cos(t)^2 + 1 + 2\cdot sin(t) + sin(t)^2 = 2 + 2\cdot sin(t) = 2\cdot(1+sin(t))$. Max bei $t = \frac{\pi}{2}$, wenn $sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \underset{t\in[0,\pi]}{sup}\|\gamma(t)\| = \sqrt{2\cdot(1+1)} = 2$ ✓



Satz 8.3.9.: Eine Folge von Funktionen $F_n : D \to \mathbb{R}^q$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $F : D \to \mathbb{R}^q$, wenn $\|F - F_n\|_D \to 0$.

Satz 8.3.10.: Der Raum $C(K, \mathbb{R}^q)$ mit $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt ist ein Banachraum[2].

[2] vollständiger normierter Raum

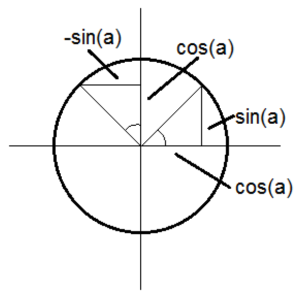
Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} F_n(x)$

Satz 8.3.11. (Weierstraß'scher M-Test): Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ und $M_k \geq 0$. Falls $\|F_k\|_D \leq M_k$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{n} F_n(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x)$ gleichmäßig.

8.4 Lineare Funktionen und Matrizen

Satz 8.4.3.: Eine Funktion $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist genau dann linear, wenn es eine $q \times p$-Matrix A gibt mit $L(x) = A \cdot x$. Weiters: $\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|A \cdot x\|$. $A_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$



Streckungsnorm/Abbildungsnorm $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ linear. $\|L\| := \max_{\substack{\|x\|=1, \\ \|y\|=1}} \begin{matrix} \|L\cdot x\| \\ \|L\cdot y\| \end{matrix} \overset{!}{<} \infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|L\cdot x\|}{\|x\|},\ y = \frac{x}{\|x\|}$

$\Rightarrow \|y\| = 1$

Frobeniusnorm $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad A = (a_{ij})\ \ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} \mid a_{ij} \mid^2}$

Satz 8.4.11.: $\|L\| \leq \|L\|_2$

Beweis: A sei die zu L gehörige Matrix und $A = \begin{pmatrix} \dots & r_1 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & r_q & \dots \end{pmatrix}$

$y = A \cdot x \Rightarrow y_i = \langle r_i \mid x \rangle \underset{Ungleichung}{\overset{CauchySchwarz}{\Longrightarrow}} \mid y_i \mid = \mid r_i \cdot x \mid \leq \|r_i\| \cdot \|x\|$

$\|y\|^2 = \sum_i y_i^2 \leq \sum_i \|r_i\|^2 \cdot \|x\|^2 = \|x\|^2 \cdot \sum_i \|r_i\|^2$

$\frac{\|L\cdot x\|^2}{\|x\|^2} \leq \sum_i \|r_i\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = \|L\|_2^2 \quad \blacksquare$

Definition: Sei $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}$, dann gilt: $B \equiv A^{-1}$ inverse Matrix.

8.5 Dimension, Rank, Lines, and Planes

Satz 8.5.3.: $L : X \to Y$ linear, X, Y endlich dimensionale Vektorräume. Dann gilt: $dim\ Ker(L) + dim\ Im(L) = dim\ X$ mit $Ker(L) = \{x \in X \mid L \cdot x = 0\},\ Im(L) = \{y \in Y \mid y = L \cdot x \text{ mit } x \in X\}$

Definition 8.5.4.: $Rang(L) = dim\ Im(L)$

Definition 8.5.8.:

Affine Gerade $\gamma(t) = a + b \cdot t,\ t \mapsto a + b \cdot t,\ b \neq 0,\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$

Affine Funktion $F(x) = a + A \cdot x,\ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

Affine Ebene $a + b \cdot s + c \cdot t,\ a, b, c \in \mathbb{R}^q,\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^q,\ (s,t) \mapsto a + b \cdot s + c \cdot t,\ b, c$ linear unabhängig!

9 Differentiation in mehreren Variablen

9.1 Partial Derivatives

Definition 9.1.1.: Partielle Ableitung von f nach der j-ten Variable $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \frac{d}{dt} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_p) \mid_{t=x_j}$. Andere Notationen: $\frac{\partial f}{\partial x_j} \equiv \partial_j f \equiv f_{x_j}$ und $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \equiv \partial_x f(x,y,z) \equiv f_x(x,y,z)$

Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_1 \cdot x_3 - 4 \cdot x_2^2 \cdot x_4^3$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2 \cdot x_1 + x_3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -8 \cdot x_n \cdot x_4^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_4}(x) = -12 \cdot x_2^2 \cdot x_4^2$

$f(x,y,z) = z^2 \cdot cos(x \cdot y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -z^2 \cdot sin(x \cdot y) \cdot y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -z^2 \cdot sin(x \cdot y) \cdot x \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 \cdot z \cdot cos(x \cdot y)$

Bemerkung: $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_p)}{h} = \underset{h \to 0}{lim} \frac{f(x + h \cdot e_j)}{h}$ mit $e_j = (0, \ldots, \underbrace{1}_{j-\text{te Stelle}}, 0, \ldots, 0)$

Partielle Ableitung höherer Ordnung

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$, wobei von rechts nach links abgeleitet wird!

Beispiel: $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial z \partial y \partial x}$ für $f(x,y,z) = x^2 \cdot y^3 \cdot z^4 + x^2 + y^4 + x \cdot y \cdot z$

$\frac{\partial}{\partial x} f = 2 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^4 + 2 \cdot x + y \cdot z \quad \frac{\partial}{\partial y \partial x} f = 6 \cdot x \cdot y^2 \cdot z^4 + z \quad \frac{\partial}{\partial z \partial y \partial x} f = 24 \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3 + 1 \quad \frac{\partial}{\partial y \partial z \partial y \partial x} f = 48 \cdot x \cdot y \cdot z^3 \quad \frac{\partial}{\partial x \partial y \partial z \partial y \partial x} f = 48 \cdot y \cdot z^3$

Satz 9.1.6.: (o.B.d.A.) Sei $f : B_r(a,b) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Angenommen es existieren folgende partielle Ableitungen in $B_r(a,b) : \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ bei (a,b) stetig, so existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ bei (a,b).

Beweis: $\lambda(h,k) = f(a+h, \ b+k) - f(a+h, \ b) - f(a, \ b+k) - f(a, \ b)$.

Für festes $k : \lambda(h,k) = g(h) - g(0), \ g(u) := f(a+u, \ b+k) - f(a+u, \ b)$.

Aus dem Mittelwertsatz folgt $g(h) - g(0) = h \cdot g'(s), \ \lambda(h,k) = h \cdot (\frac{\partial f}{\partial x}(a+s, \ b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+s, \ b))$ für ein $s \in (0,h)$, da $\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f$ existiert folgt wiederum aus dem Mittelwertsatz: $\frac{\partial}{\partial x} f(a+s, \ b+k) - \frac{\partial}{\partial x} f(a+s, \ b) = k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+s, \ b+t)$ für ein $t \in (0,k)$.

$\lambda(h,k) = h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+s, \ b+t)$ mit $s \in (0,h), \ t \in (0,k)$.

$\underset{(h,k) \to (0,0)}{lim} \frac{\lambda(h,k)}{h \cdot k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

$\underset{h \to 0}{lim} \underset{k \to 0}{lim} \frac{\lambda(h,k)}{h \cdot k} = \underset{h \to 0}{lim} \underset{k \to 0}{lim} \frac{1}{h} \cdot (\frac{f(a+h, \ b+k) - f(a+h, \ b)}{k} - \frac{f(a, \ b+k) - f(a, \ b)}{k}) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{1}{h} \cdot \underset{k \to 0}{lim} (\frac{f(a+h, \ b+k) - f(a+h, \ b)}{k} - \frac{f(a, \ b+k) - f(a, \ b)}{k}) =$
$\underset{h \to 0}{lim} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, \ b) - \frac{\partial}{\partial y} f(a, \ b) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(a, \ b) \quad \blacksquare$

Beispiel: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cdot y - x \cdot y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \mid f(x,y) - f(0,0) \mid = \frac{|x \cdot y| - |x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \mid x^2 - y^2 \mid \to 0 \ \ (x,y) \to (0,0) \Rightarrow f$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3 \cdot x^2 \cdot y - y^3}{x^2 + y^2} - \frac{(x^3 \cdot y - x \cdot y^3) \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y \cdot (3 \cdot x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{2 \cdot x^2 \cdot y \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,0) \mid_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} 0 \mid_{x=0} = 0$

$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| \leq \frac{|y| \cdot |3 \cdot x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} + \frac{2 \cdot x^2 \cdot |y| \cdot |x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{|y| \cdot 4 \cdot \cancel{(x^2 + y^2)}}{\cancel{(x^2 + y^2)}} + \frac{2 \cdot \cancel{(x^2 + y^2)} \cdot |y| \cancel{(x^2 + y^2)}}{\cancel{(x^2 + y^2)^2}} = 6 \cdot \mid y \mid \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2$ unter Verwendung von $\mid x \pm y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid, \ x \cdot y \leq \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2), \ x^2 \leq x^2 + y^2, \ y^2 \leq x^2 + y^2$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y_0, x_0)$

$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\ldots\ldots) = \ldots \cdots = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \quad (x,y) \neq 0$

$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(0,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1, \ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}(+x) = +1$

Definition 9.1.8.: Eine Funktion $F : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ mit U offen heißt C^k, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig sind. Menge der C^k-Funktionen: $C^k(U, \mathbb{R}^q)$. f aus vorhergehendem Beispiel ist $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ beziehungsweise $C^2(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \mathbb{R})$, sogar C^∞.

Bemerkung: $C^0(U, \mathbb{R}^q) \equiv C(U, \mathbb{R}^q)$ stetige Funktionen.

Satz 9.1.9.: Für eine C^k-Funktion ist die Reihenfolge der Ableitungen egal.

9.2 Das Differential

$f(a+h) = f(a) + \underbrace{T(h)}_{A\cdot h} + \dots \qquad \frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|}{\|h\|} \to 0$

Definition 9.2.2.: Sei $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ und a sei Innerer Punkt von D. Dann heißt F differenzierbar bei a, wenn eine lineare Funktion $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ existiert mit der Eigenschaft $\underset{h\to 0}{lim} \frac{\|F(a+h)-F(a)-L(h)\|}{\|h\|} = 0$. Für $p = q = 1 : 0 = \underset{h\to 0}{lim} \frac{F(a+h)-F(a)-L\cdot h}{h} = \underset{h\to 0}{lim} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} - L \Rightarrow L = \underset{h\to 0}{lim} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} := F'(a)$

Bemerkung: $\vec{h} = \epsilon \cdot \vec{e}_j \quad \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Für $q = 1 :\ \underset{h\to 0}{lim} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|}{\|h\|} = \underset{\epsilon\to 0}{lim} \frac{1}{\epsilon} \cdot \mid f(a+e_j\cdot\epsilon) - f(a) - L(e_j)\cdot\epsilon \mid = 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{\underset{\epsilon\to 0}{lim} \frac{f(a+e_j\cdot\epsilon)-f(a)}{\epsilon}}_{\equiv \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)} = L(e_j)$

Satz 9.2.3.: Ist F differenzierbar bei a, so ist F stetig bei a.

Beispiel: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ nicht stetig bei $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,0) \mid_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} 0 \mid_{x=0} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2\cdot x^2\cdot y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{1}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} \infty$

Satz 9.2.5.: $F : D \to \mathbb{R}^q$ sei differenzierbar bei $a \in D$. Dann ist $L = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Insbesondere ist L eindeutig! Bezeichnung: $L \equiv dF(a)$ Differential von F oder auch Jacobi-Matrix von F bei a.

Beispiel: $F(x,y) = (x^2+y^2, x\cdot y)$

$\left.\begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=(2\cdot x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=(2\cdot y,x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow dF(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cdot x & 2\cdot y \\ y & x \end{pmatrix}$

$(x,y) = (1,2) \rightsquigarrow dF(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Satz 9.2.7.: $F = (f_1, \dots, f_q)$ ist genau dann bei a differenzierbar, wenn alle Komponenten f_j bei a differenzierbar sind.

Satz 9.2.8.: Sei $F : U \to \mathbb{R}^q$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Falls alle partielle Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ in U existieren und stetig sind, so ist auch F in U differenzierbar.

Bemerkung: $F \in C^1(U, \mathbb{R}^q) \Rightarrow F$ differenzierbar auf U.

Beweis: o.B.d.A. $q = 1$, Induktion nach p

Induktionsanfang: $p = 1$

Induktionsschritt: Annahme: Satz gilt für $p \Rightarrow$ Satz gilt für $p+1$

Weiters gilt: $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{p+1}$ wobei $(x,y) = (x_1, \dots, x_p, y)$ ist, $(a,b) \in U \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R},\ (h,k) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$

z.z.: $f(a+h,\ b+k) = f(a,b) + L(h,k) + \dots$

$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) = [f(a+h,\ b+k) - f(a+h,\ b)] + [f(a+h,\ b) - f(a,\ b)] = \dots$

Abkürzung: $g(x) = f(x,\ b)$

$\dots = g(a+h) - g(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+h,\ c)\cdot k \qquad c \in (b,\ b+k)$

Nach Induktionsvoraussetzung: $\underset{h\to 0}{lim} \frac{g(a+h)-g(a)-dg(a)\cdot h}{\|h\|} = 0$

$\|(h,k)\| = \sqrt{h_1^2+\cdots+h_p^2+k^2} = \sqrt{\|h\|^2+k^2}$, insbesondere gilt: $\|h\| \leq \|(h,k)\|$ und $\mid k \mid \leq \|(h,k)\|$

$\Rightarrow \underset{(h,k)\to 0}{lim} \frac{g(a+h)-g(a)-dg(a)\cdot h}{\|(h,k)\|} = 0 \qquad df(x,\ y) = (\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_p}}_{dg(x)}, \frac{\partial f}{\partial y})$

$\underset{(h,k)\to 0}{lim} \frac{f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)-dg(a)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)\cdot k}{\|(h,k)\|}$

$\underset{(h,k)\to 0}{lim} \frac{g(a+h)-g(a)-dg(a)\cdot h)}{\|(h,k)\|} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h),\ c)\cdot k-\frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)\cdot k}{\|(h,k)\|} = \underset{(h,k)\to 0}{lim} \underbrace{(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,\ c)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b))}_{\to 0 \text{ da } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig}} \cdot \frac{k}{\|(h,k)\|} = 0 \quad \blacksquare$

Beispiel: $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (x,y) \mapsto (x\cdot e^y,\ y\cdot e^x,\ x\cdot y)$

$$dF(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & x\cdot e^y \\ y\cdot e^x & e^x \\ y & x \end{pmatrix}$$

9.3 Kettenregel

Satz 9.3.1.: Seien F und G differenzierbar, dann gilt:

(a) $c\cdot F$ ist differenzierbar mit $c\in\mathbb{R}$ und $d(c\cdot F) = c\cdot dF$

(b) $F+G$ ist differenzierbar und $d(F+G) = dF+dG$

Satz 9.3.2.: Sei $F: U\subseteq\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ und sei a ein Punkt in U. F ist genau dann differenzierbar bei a, wenn eine Matrixwertige Funktion Q existiert die stetig bei a ist mit $F(a+h)-F(a) = Q(h)\cdot h$. In diesem Fall muss $Q(0) = dF(a)$ sein.

Beweis: Angenommen es gilt $F(a+h)-F(a) = Q(h)\cdot h$. Dann:

$\frac{\|F(a+h)-F(a)-Q(0)\cdot h\|}{\|h\|} = \frac{(Q(h)-Q(0))\cdot h}{\|h\|} \leq \frac{\|Q(h)-Q(0)\|\cdot\cancel{\|h\|}}{\cancel{\|h\|}} = \|Q(h)-Q(0)\| \to 0$ also ist F differenzierbar bei a.

Angenommen F sei differenzierbar bei a:

$\epsilon(h) = F(a+h)-F(a)-dF(a)\cdot h,\ \frac{\epsilon(h)}{\|h\|} \to 0$

$$\Delta(h) = \frac{1}{\|h\|^2}\cdot\begin{pmatrix} \epsilon_1(h)\cdot h_1 & \epsilon_1(h)\cdot h_2 & \ldots \\ \epsilon_2(h)\cdot h_1 & \epsilon_2(h)\cdot h_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\frac{|\epsilon_j(h)\cdot h_i|}{\|h\|^2} \leq \frac{\|\epsilon(h)\|\cdot\cancel{\|h\|}}{\|h\|^{\cancel{2}}} = \frac{\|\epsilon(h)\|}{\|h\|} \to 0 \Rightarrow \Delta(h)$ ist stetig bei 0, $\Delta(0) = 0$

$\Delta(h)\cdot h = \epsilon(h) \rightsquigarrow Q(h) = dF(a)+\Delta(h) \quad \blacksquare$

Satz 9.3.3.: Seien $U\subseteq\mathbb{R}^r,\ V\subseteq\mathbb{R}^p$ offen und $G: U\to\mathbb{R}^p,\ F: V\to\mathbb{R}^q$ mit $G(U)\subset V$. Weiters sei $a\in U$ und G differenzierbar bei a und F differenzierbar bei $b = G(a)$. Dann ist $F\circ G$ differenzierbar bei a und es gilt $d(F\circ G)(a) = dF(G(a))\cdot dG(a)$.

Beweis: $G(a+h)-G(a) = Q_G(h)\cdot h \ \ Q_G(0) = dG(a),\ F(b+k)-F(b) = Q_F(k)\cdot k \ \ Q_F(0) = dF(b)$

$\underbrace{(F\circ G)(a+h)}_{F(G(a+h))} - \underbrace{(F\circ G)(a)}_{F(b)} = F(b+\underbrace{Q_G(h)\cdot h}_{k})-F(b) = \underbrace{Q_F\cdot(Q_G(h)\cdot h)\cdot Q_G(h)}_{:=Q_{F\circ G}(h)}\cdot h \Rightarrow F\circ G$ differenzierbar und $d(F\circ G)(a) =$

$Q_{F\circ G}(0) = Q_F(0)\cdot Q_G(0) = dF(b)\cdot dG(a) \quad \blacksquare$

Beispiel: $\phi(r,s,t) = f(r\cdot(s+t), r\cdot(s-t)),\ \phi:\mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \phi = f\circ G$

$d\phi(1,2,1)$ falls $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 4,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -5$

$G(r,s,t) = (g_1(r,s,t), g_2(r,s,t)) = (r\cdot(s+t), r\cdot(s-t))$

$$dG = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{r} & \frac{\partial g_1}{s} & \frac{\partial g_1}{t} \\ \frac{\partial g_2}{r} & \frac{\partial g_2}{s} & \frac{g_2}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t & r & r \\ s-t & r & -r \end{pmatrix}$$

$dG(1,2,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\phi(r,s,t) = f(g_1(r,s,t), g_2(r,s,t)) \quad d\phi(a) = df(G(a)) \cdot dG(a) \qquad a = (1,2,1),\ G(a) = (3,1)$

$df(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) \quad df(G(a)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(3,1), \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)) = (4,-5)$

$d\phi(1,2,1) = df(3,1) \cdot dG(1,2,1) = (4,-5) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (7 \quad -1 \quad 9)$

Beispiel:

$x = r \cdot cos\theta,\ y = r \cdot sin\theta \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 \quad df(x,y) = (2 \cdot x \quad -2 \cdot y)$

$G(r,\theta) = \begin{pmatrix} r \cdot cos\theta \\ r \cdot sin\theta \end{pmatrix} \quad dG = \begin{pmatrix} cos\theta & -r \cdot sin\theta \\ sin\theta & r \cdot cos\theta \end{pmatrix}$

$f(r,\theta) = r^2 \cdot (cos^2\theta - sin^2\theta) \quad df(r,\theta) = (2 \cdot r \cdot cos\theta \quad -2 \cdot r \cdot sin\theta) \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -r \cdot sin\theta \\ sin\theta & r \cdot cos\theta \end{pmatrix}$

Satz 9.3.6. (Inneres Produkt): Seien $F,\ G$ differenzierbar, dann gilt $d(F \cdot G)(a) = G(a) \cdot dF(a) + F(a) \cdot dG(a)$.

9.4 Anwendungen der Kettenregel

Sei $df = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p})$ mit $q = 1$, dann wird er als Gradient bezeichnet (Notation ∇f oder $grad\ f$)

Definition 9.4.2. (Richtungsableitung): Seien $a \in \mathbb{R}^p$ und $u \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $g(t) = f(a + t \cdot u) \quad \frac{d}{dt} g(t) \mid_{t=0} = df(a) \cdot u$ mit $\mid df(a) \cdot u \mid \leq \|df(a)\| \cdot \|u\|$

Satz 9.4.4.: Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs.

The Derivative of a Curve

$z = f(x,y) \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z = \underbrace{\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}}_{f(x,y)} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} sin\theta \cdot cos\phi \\ sin\theta \cdot sin\phi \\ cos\theta \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \gamma(t) \end{matrix}\right\}$ KURVE $\quad d\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \end{pmatrix} \equiv \gamma'(t)$

$\gamma(t) = \gamma(a) + \gamma'(a) \cdot (t - a) + \dots$

Tangente an γ existiert bei a, falls $\gamma'(a) \neq \vec{0}$

Beispiel: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & sin(2 \cdot t) \end{pmatrix} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -sin(t) & 2 \cdot cos(2 \cdot t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Höherdimensionale Tangentialräume

$F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \quad q > p \quad F(x) = F(a) + dF(a) \cdot (x - a) = Q(x - a) \cdot (x - a) \quad ker(dF) = \{0\}$ Rang$(dF) = p$ maximal

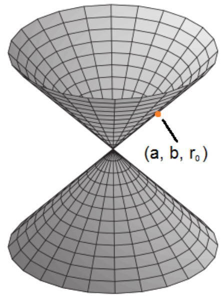
Definition 9.4.7.: Sei $p < q$ $F : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (offen) injektiv und glatt (C^1) mit $dF(a)$ von maximalen Rang p an jedem Punkt $a \in U$. Dann nennen wir das Bild von F eine glatte Fläche.

Beispiel: $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$G(r,\theta) = (r \cdot cos\theta, r \cdot sin\theta, r)$

$dG = \begin{pmatrix} cos\theta & -r \cdot sin\theta \\ sin\theta & r \cdot cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{r_0} & -b \\ \frac{b}{r_0} & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

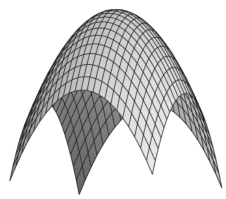
$$dG(0,\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 \\ sin\theta & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Niveau-Mengen

Sei $F : U \to \mathbb{R}^d$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^q$ offen. Dann ist die Niveau-Menge folgendermaßen definiert: $S = \{x \in U \mid F(x) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}^d$.

Beispiel: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ $\quad F(x,y) = x^2 + y^2 \quad y = \pm\sqrt{1-x^2} \;\; x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$



Satz 9.4.9.: Sei $F : U \to \mathbb{R}^d$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und $G : V \to \mathbb{R}^q$, so dass $G(V) \subseteq S$ (das heißt $F(G(V)) = c$). Dann gilt $dF(y) \circ dG(x) = 0 \;\; \forall\, y = G(x),\; x \in V$.

Beweis: Kettenregel $F(G(x)) = c$ $\quad\blacksquare$

Beispiel: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ und $\|\gamma(t)\| = 1$. Dann gilt $\gamma'(t) \perp \gamma(t)$

$\|\gamma(t)\|^2 = 1 = \sum\limits_{j=1}^{p} \gamma_j(t)^2 \quad \backslash \frac{d}{dt}$

$0 = \sum\limits_{j=1}^{p} 2 \cdot \gamma_j(t) \cdot \gamma_j'(t) = 2 \cdot \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$

9.5 Taylor'sche Formel

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ C^k mit $k \in \mathbb{N}$ und $a \in U$.

$g(t) = f(a + t \cdot h) \;\; t \in (-1, 1)$

$g(0) = f(a),\; g'(0) = df(a) \cdot h = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_j,\; g''(0) = \underbrace{h^T \cdot d^2 f(a) \cdot h}_{\equiv d^2 f(a) \cdot h^2} = \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = d^2 f \cdot h^2 = h^T \cdot H \cdot h$ mit

$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}$, H ist die Hesse-Matrix.

$g^{(k)}(0) =\text{"} d^k f(a) \cdot h^k \text{"} := \sum\limits_{i_1=1}^{p} \cdots \sum\limits_{i_k=1}^{p} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} \;\; g(t) = f(a + h \cdot t) = g(0) + g'(0) + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n + R_n(t)$

$R_n(t) = \frac{g^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \cdot t^{n+1} \qquad s \in (0, t)$

$g^{(k)}(0) = d^k f(a) \cdot h^k := (\sum\limits_{i_1=1}^{p} \cdots \sum\limits_{i_k=1}^{p} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_k}) \Rightarrow f(a+h) = g(1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot d^k f(a) \cdot h^k + R_n$

$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(c) \cdot h^{n+1}$ mit $c = a + s \cdot h$ und $h = x - a$

Satz 9.5.1.: $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ und alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $n+1$ existieren auf U. Dann gilt $f(x) =$

$f(a) + df(a) \cdot (x-a) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot d^n f(a) \cdot (x-a)^n + R_n$ mit $R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot d^{n+1} f(c) \cdot (x-a)^{n+1}$ und c "zwischen"[3] x und a

Beispiel: $f(x,y) = ln(x+y) \quad a = \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{pmatrix}, \ n = 2 \quad h = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$

$f(a) = ln(0+1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} = \frac{\partial f}{\partial y}$

$df(a) \cdot h = \frac{1}{x_0+y_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{x+y-1}{x_0+y_0} = x+y-1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

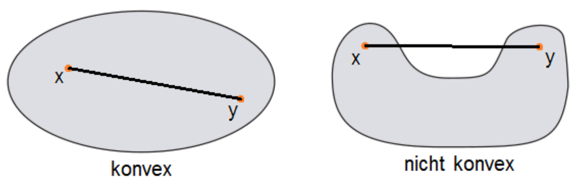
$d^2 f(a) \cdot h^2 = (x, y-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{(x_0+y_0)^2} & \frac{-1}{(x_0+y_0)^2} \\ \frac{-1}{(x_0+y_0)^2} & \frac{-1}{(x_0+y_0)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{(x_0+y_0)^2} \cdot (x, y-1) \cdot \begin{pmatrix} x+y-1 \\ x+y-1 \end{pmatrix} = \frac{-(x+y-1)^2}{(x_0+y_0)^2} = -(x+y-1)^2$

$f(x) = x+y-1 - \frac{1}{2} \cdot (x+y-1)^2 + R_2 \qquad R_2 = \frac{1}{3 \cdot c^3} \cdot (x+y-1)^3$ mit c zwischen 1 und $x+y$

Speziell $n = 0 \qquad f(x) = f(a) + R_0 \qquad R_0 = df(c) \cdot (x-a)$

Satz 9.5.3. (Mittelwertsatz): Sei f: $B_r(a) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt $f(x) - f(a) = df(c) \cdot (x-a)$ für ein c "zwischen" a und x.

Definition 9.5.4.: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt konvex, falls aus $x, y \in A$ auch $x + t \cdot (y-x) \in A$ für alle $t \in (0,1)$ gilt.



Korollar 9.5.5.: $U \subseteq \mathbb{R}^p$ sei offen und konvex und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\|df(x)\| \leq M$ für alle $x \in U$. Dann gilt $| f(x) - f(y) | \leq M \cdot \|x-y\| \ \ \forall \ x, y \in U$.

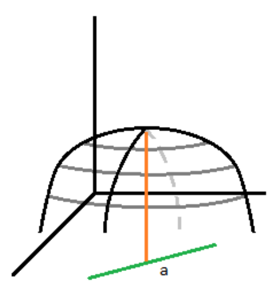
Korollar 9.5.6.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ zusammenhängend, offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $df \equiv 0$. Dann ist f konstant auf U.

Beweis: Sei V die Menge mit $f(x) = f(a)$ für ein festes $a \in U \Rightarrow V$ offen.

V relativ abgeschlossen, dann sei x aus dem relativen Abschluss $\Rightarrow V \ni x_n \to x$. Man kann wählen $x_n = x + \frac{1}{n} \cdot e_j \Rightarrow f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x + \frac{1}{n} \cdot e_j) = \lim_{n \to \infty} f(a) = f(a) \Rightarrow V = U$ da U zusammenhängend $\blacksquare$

Maxima und Minima

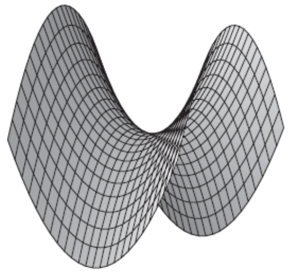
Lokale Extrema bei $a \Rightarrow$ notwendig $df(a) = 0 \quad f(x) = f(a) + h^T \cdot d^2 f(a) \cdot h + \dots$



$g(t) = f(a + h \cdot t) \qquad g'(0) \stackrel{!}{=} 0 = df(a) \cdot h \ \ \forall \ h \Rightarrow df(a) = 0$

Satz 9.5.7.: Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f bei a ein lokales Maximum oder Minimum, so gilt $df(a) = 0$.

[3] Die Verbindungslinie muss zur Gänze in U enthalten sein



Beispiel: $df(a) = 0 f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \cdot h^T \cdot d^2f(a) \cdot h + \dots \qquad h = x - a \qquad f(x) = f(a) + \frac{f"(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \dots$

$p = 2 \;\; df^2(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \qquad h^T \cdot d^2f(a) \cdot h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h_1^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot h_1 \cdot h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h_2^2$

Definition 9.5.8.: Eine quadratische Matrix A heißt $\substack{\text{positiv} \\ \text{negativ}}$ definit, falls $h^T \cdot A \cdot h \gtrless 0$ für alle $h \neq 0$ ist.

Wenn A symmetrisch ist, dann existiert Q (orthogonal) mit $Q^T \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$. Wenn A symmetrisch ist, dann gilt: Positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte positiv.

Lemma 9.5.9.: Sei A positiv definit, dann existiert ein $m > 0$, so dass B positiv definit ist für $\|B - A\| < \frac{m}{2}$.

Beweis: $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|A \cdot x\|, \; \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \; m = \min\limits_{\|u\|=1} u^T \cdot A \cdot u > 0$

$| \, u^T \cdot (A - B) \cdot u \, | \leq \|u\| \cdot \|(A - B) \cdot u\| \leq \|(A - B)\| \cdot \|u\|^2 = \|A - B\|$

$u^T \cdot B \cdot u = \underbrace{u^T \cdot A \cdot u}_{> m} - \underbrace{u^T \cdot (A - B) \cdot u}_{\leq \|A - B\| < \frac{m}{2}} \geq \frac{m}{2} \qquad \blacksquare$

Satz 9.5.10.: Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2$ in der Nähe von $a \in U$. Falls $df(a) = 0$ und $d^2f(a) \gtrless 0$ dann hat f bei a ein lokales $\substack{\text{Minimum} \\ \text{Maximum}}$.

Beweis: $f \in C^2 \; (B_r(a), \; \mathbb{R} \qquad f(a + h) = f(a) + h^T \cdot d^2f(c) \cdot h \qquad c \in B_r(a) \quad \|h\| < r$

$d^2f(a) > 0 \Rightarrow d^2f(c) > 0$ falls $c \in B_\delta(a)$ mit δ genügend klein. Da dies wegen Lemma 9.5.9. und der Stetigkeit von $d^2f(x)$ erfüllt ist $\Rightarrow f(a + h) - f(a) = h^T \cdot d^2f(c) \cdot h > 0 \qquad h \in B_\delta(a) \backslash \{a\} \qquad \blacksquare$

Satz 9.5.11.: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine symmetrische Matrix und $\Delta = det \; A = a \cdot c - b^2$ die dazugehörige Determinante, dann gilt:

(a) $A > 0 \Leftrightarrow a > 0$ und $\Delta > 0$

(b) $A < 0 \Leftrightarrow a < 0$ und $\Delta > 0$

(c) $\Delta < 0 \Rightarrow A$ ist weder positiv noch negativ definit

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + x \cdot y + y^2 - 2 \cdot x - 4 \cdot y + 1$

$df(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + y - 2 \\ x + 2 \cdot y - 4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} 2 \cdot x + y - 2 = 0 \\ x + 2 \cdot y - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow d^2f(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad det \; d^2f(a) = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ Positiv definit, Minimum

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^2 - x - 4 \cdot y + 5$

$df(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 3 \cdot y - 1 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} 2 \cdot x + 3 \cdot y - 1 = 0 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = d^2f(a) \quad det\ d^2f(a) = 4 - 9 = -5 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Lagrange Multiplikatoren

Beispiel: $f(x,y,z) = 2 \cdot x \cdot y + z,\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\ df(a) = \underbrace{\lambda}_{\text{Lagrange Multiplikator}} \cdot dg(a) \quad g(a) = 1$

$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot y \\ 2 \cdot x \\ 1 \end{pmatrix},\ dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 2 \cdot y \\ 2 \cdot z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{2} \cdot y = \lambda \cdot \cancel{2} \cdot x \\ \cancel{2} \cdot x = \lambda \cdot \cancel{2} \cdot y \\ 1 = \lambda \cdot 2 \cdot z \end{matrix} \Rightarrow$ Durch einsetzen und umformen erhalten wir: $\lambda = \pm 1$ oder

$x = y = 0,\ z = \pm 1,\ x = \pm y,\ z = \pm \frac{1}{2},\ x = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$

$a \in \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \}$

$f(a) \in \{1, -1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\} \Rightarrow \frac{5}{4}, \frac{5}{4}$ Maxima, $-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}$ Minima

9.6 Der Inverse-Funktionen-Satz

Satz: Sei $F : V \subseteq \mathbb{R}^p \to W \subseteq \mathbb{R}^q$ eine Funktion, dann heißt F injektiv falls $x \neq y$ und auch $F(x) \neq F(y)$ impliziert bzw. surjektiv falls $F(V) = W$ ist. F ist bijektiv $\Leftrightarrow$ injektiv und surjektiv.

Definition 9.6.1.: $F : V \subseteq \mathbb{R}^p \to W \subseteq \mathbb{R}^q$ hat eine lokale glatte Inverse bei $a \in V$, falls es eine offene Umgebung um a gibt, so dass F bijektiv und F^{-1} glatt ist.

Satz 9.6.2.: Sei $F : V \to W$ glatt (C^1), $a \in V$ mit $dF(a)$ nicht-singulär ($\equiv$ invertierbar, $det\ dF(a) \neq 0$). Dann existiert eine Umgebung $B_r(a)\ \ r > 0$ und $M > 0$, so dass

(a) $dF(x)$ ist nicht-singulär $\forall\ x \in B_r(a)$

(b) $\|x - y\| \leq M \cdot \|F(x) - F(y)\|\ \forall\ x, y \in B_r(a)$

(c) F ist injektiv auf $B_r(a)$

Beweis: $B := (dF(a))^{-1},\ G(x) = B \cdot F(x),\ d(B \cdot F)(a) = B \cdot dF(a) = \mathbb{1}$ ($p \times p-$Einheitsmatrix)

Nach Lemma 9.5.9. existiert ein $m > 0$, so dass $U \cdot dG(x) \cdot U \geq \frac{m}{2}$ für $\|dG(x) - dG(a)\| < \frac{m}{2}$ und alle $U \in \mathbb{R}^p$ ist mit $\|U\| = 1$. Da $dG(x)$ stetig ist $\Rightarrow\ \exists\ r > 0$, so dass $\|dG(x) - dG(a)\| < \frac{m}{2}$ ist, falls $\|x - a\| < r \Rightarrow U \cdot dG(x) \cdot U \geq \frac{m}{2}$, falls $x \in B_r(a)$ und $\|U\| = 1$.

Wir betrachten $\phi(t) = U \cdot G(x + t \cdot u) \Rightarrow k \cdot \phi'(s) = \phi(k) - \phi(0)\ \ s \in (0, k)$

$k \cdot (U \cdot dG(\underbrace{x + s \cdot u}_{=:c}) \cdot U) = U \cdot (G(\underbrace{x + k \cdot u}_{=:y}) - G(x)) \ \rightsquigarrow\ \frac{m \cdot k}{2} \leq k \cdot (U \cdot dG(c) \cdot U) = | U \cdot (G(y) - G(x)) | \leq \|U\| \cdot \|G(y) - G(x)\| =$

$\|B \cdot (F(y) - F(x)\| \leq \|B\| \cdot \|F(y) - F(x)\| \ \rightsquigarrow\ \|y - x\| = k \leq \underbrace{\frac{2 \cdot \|B\|}{m}}_{\equiv M} \cdot \|F(y) - F(x)\| \quad \blacksquare$

Satz 9.6.3.: Sei $F : V \to W$ glatt (C^1) mit $dF(x)$ nicht-singulär für alle $x \in V$, dann ist F eine offene Abbildung, das heißt F bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Satz 9.6.4.: Sei $F : V \to W$ glatt und $a \in V$ mit $dF(a)$ nicht-singulär. Dann existiert F^{-1} in der Nähe von a und ist glatt mit $d(F^{-1})(b) = (dF(a))^{-1}$ mit $b = F(a)$.

Beweis: $B_r(a) \subset V$ wie in Satz 9.6.2.

$\|F(x) - F(a)\| \geq M \cdot \|x - a\|\ \ x, a \in B_r(a)$. Setze $y = F(x)$, das heißt $x = F^{-1}(y)\ \ a = F^{-1}(b)$

$\|x - a\| = \|F^{-1}(y) - F^{-1}(b)\| \leq \frac{1}{M} \cdot \|y - b\|\ \ y, b \in F(B_r(a)) \Rightarrow F^{-1}$ stetig auf $F(B_r(a))$. Aus F differenzierbar bei a folgt

$F(x) - F(a) - dF(a) \cdot (x-a) =: \epsilon(x)$ erfüllt $\lim\limits_{x \to a} \frac{\epsilon(x)}{\|x-a\|} = 0$

$-(dF(a))^{-1} \cdot \epsilon(x) = F^{-1}(y) - F^{-1}(b) - (dF(a))^{-1} \cdot (y-b)$

$\lim\limits_{y \to b} \frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(b) - (dF(a))^{-1} \cdot (y-b)}{\|y-b\|} = \lim\limits_{y \to b} \frac{-(dF(a))^{-1} \cdot \epsilon(x)}{\|y-b\|}$

$\frac{-(dF(a))^{-1} \cdot \epsilon(x)}{\|y-b\|} \leq \frac{\|-(dF(a))^{-1}\| \cdot \|\epsilon(x)\|}{\|y-b\|} \leq \frac{\|-(dF(a))^{-1}\|}{M} \cdot \frac{\|\epsilon(x)\|}{\|x-a\|} \rightsquigarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{\|-(dF(a))^{-1}\| \cdot \|\epsilon(x)\|}{\|y-b\|} = 0$ aus $a \mapsto dF(a)$ stetig folgt $(dF(a))^{-1}$ stetig ■

Beispiel: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ F(r, \theta) = (r \cdot cos\theta,\ r \cdot sin\theta)$

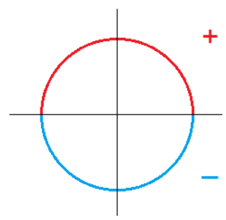
$dF(r, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -r \cdot sin\theta \\ sin\theta & r \cdot cos\theta \end{pmatrix}$, $det\ dF(r,\theta) = r \cdot cos^2\theta + r \cdot sin^2\theta = r \Rightarrow dF(r,\theta)$ nicht-singulär auf $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$

Seien $V = \{(r, \theta) \mid r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ und $W = \{(x, y) \mid x > 0\}$, dann gilt $F^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2},\ arctan(\frac{y}{x}))$

9.7 Der Satz über implizierte Funktionen

Beispiel: $\mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2 + y^2 = 1,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$

$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix}$



Satz 9.7.2.: Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q\ \ (a, b) \in U$ mit $F(a, b) = 0$ und $F^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix}$ glatt. Ist $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_q)}{\partial(y_1, \ldots, y_q)}$ nicht-singulär bei $(a, b) \Rightarrow$ es existiert eine Umgebung V von (a, b) und eine glatte Funktion $G : A \to \mathbb{R}^q$ mit $G(a) = b$ und $F(x, G(x)) = 0\ \forall\ x \in A$. Außerdem ist $dG = -(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_q)}{\partial(y_1, \ldots, y_q)})^{-1} \cdot \frac{\partial(f_1, \ldots, f_q)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}$

Korollar 9.7.3.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und $F : U \Rightarrow \mathbb{R}^q$ glatt. Angenommen $c \subset U$ mit $F(c) = 0$ und $Rang(dF(c)) = q$ mit $q \leq d$. Dann existiert eine Umgebung von V um c, so dass die Niveau-Mengen $S = \{u \in V : F(u) = 0\}$ eine glatte p-Fläche mit $p = d \cdot q$ ist, das heißt S hat eine glatte Parametrisierung der Dimension p. Der Tangentialraum bei c ist durch $dF(c) \cdot (u - c) = 0$ bestimmt.

Beweis: $Rang(dF(c)) = q \Rightarrow$ es existieren q linear unabhängige Vektoren (bzw. eine $q \times q$ Teilmatrix die nicht-singulär ist) nach einer Variablenpermutation können wir annehmen, dass das die letzten q Variablen sind. $(x, y) = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ aus dem Implizite-Funktionen-Satz folgt $S = \{u = (x, y) \subseteq V \mid F(0) = 0\} =$

$= \{(x, G(x)) \mid x \in \tilde{V}\}$ ■

Beispiel: $f_1(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - x = 0,\ f_2(x, y, u, v) = u + v + y = 0$

$u = -v - y \Rightarrow (v + y)^2 + v^2 - x = 0 \rightsquigarrow v^2 + v \cdot y + \frac{y^2 - x}{2} = 0$

$v = -\frac{y}{2} \pm \sqrt{(\frac{y}{2})^2 + \frac{x - y^2}{2}} = -\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{2 \cdot x - y^2}{4}},\ u = \frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{2 \cdot x - y^2}{4}}$

$\left.\begin{matrix} 2 \cdot u^2 - x = 0 \Rightarrow 4 \cdot u^2 = 2 \cdot x \\ 2 \cdot u + y = 0 \Rightarrow 4 \cdot u^2 = y^2 \end{matrix}\right\} y^2 = 2 \cdot x$

$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 2 \cdot u & 2 \cdot v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad df = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \cdot u & 2 \cdot v \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

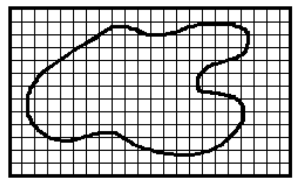
Beispiel: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^3=0;\ d=3,\ q=1 \Rightarrow p=d-q=2 \quad df=(2\cdot x,\ 2\cdot y,\ 3\cdot z^2)$

Glatt auflösbar nach $\left.\begin{array}{l} x \text{ falls } x\neq 0\\ y \text{ falls } y\neq 0\\ z \text{ falls } z\neq 0\end{array}\right\}$ Auflösbar nach irgendeiner Variable falls $(x,y,z)\neq(0,0,0)$

$z^3=-(x^2+y^2) \quad z=-\sqrt[3]{x^2+y^2}$

10 Integration in mehreren Variablen

10.1 Integration über Rechtecke



Rechteck im $\mathbb{R}^d: R=[a_1,b_1]\cdots[a_d,b_d]=\{(x_1,\dots,x_d)\mid x_1\in[a_1,b_1],\dots,x_d\in[a_d,b_d]\}$

$V(R):=\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)=(b_1-a_1)\cdots(b_d-a_d)$ mit $a_j\leq b_j$

Partition eines Rechtecks in $\mathbb{R}^d \Leftrightarrow$ eine Ansammlung von Partitionen für die Intervalle $[a_j,b_j]$ mit $j=1,\dots,d$

Definition Ober-/Untersumme: Sei R ein Rechteck und P eine Partition in Teilrechtecke $R_j: P=[R_1,\dots,R_j]$. Dann heißt $U(f,P)=\sum_{j=1}^{n}M_j\cdot V(R_j)$ mit $M_j=\sup_{R_j}f$ die Obersumme einer beschränkten Funktion f und $L(f,P)=\sum_{j=1}^{n}m_j\cdot V(R_j)$ mit $m_j=\inf_{R_j}f$ die Untersumme von f.

Definition: $\sum_{j=1}^{n}f(u_j)\cdot V(R_j)$ mit $u_j\in R_j$ heißt Riemannsumme für f zu P.

Verfeinerung einer Partition ist eine Partition Q deren Teilrechtecke alle Teilmengen irgendeines Teilrechtecks von P sind.

Satz 10.1.2.: Sei R ein Rechteck, P eine Partition von R und Q eine Verfeinerung von P, dann $L(f,P)\leq L(f,Q)\leq U(f,Q)\leq U(f,P)$.

Satz 10.1.3.: $L(f,P_1)\leq U(f,P_2)$ mit P_1,P_2 zwei Partitionen von R.

Definition: R sei ein Rechteck in $\mathbb{R}^d$ und $f: R\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt $\bar{\int}_R f(x)dV(x))=\inf_P U(f,P)$ Oberintegral und $\underline{\int}_R f(x)dV(x)=\sup_P L(f,P)$ Unterintegral von f über R.

Satz 10.1.5.: $L(f,P)\leq\underline{\int}_R f(x)dV(x)\leq\bar{\int}_R f(x)dV(x)\leq U(f,P)$

Definition: $f: R\subseteq\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ beschränkt heißt integrierbar über R, falls Ober-und Unterintegral gleich sind. In diesem Fall heißt der gemeinsame Wert das Riemannintegral von f über $R: \int_R f(x)dV(x)$.

Satz 10.1.7.: f ist Riemannintegrierbar über R genau dann, wenn es zu jedem ϵ eine Partition P mit $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$ gibt.

Satz 10.1.8.: f ist Riemannintegrierbar über R genau dann, wenn eine Folge von Partitionen P_n existiert mit $U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0$.

Eigenschaften der Integrals

Satz 10.1.10.: Das Integral ist linear. $c\in\mathbb{R},\ f$ und g integrierbar dann gilt:

(a) $\int_R c\cdot f(x)dV(x)=c\cdot\int_R f(x)dV(x)$

(b) $\int(f(x)+g(x))dV(x)=\int f(x)dV(x)+\int g(x)dV(x)$

Satz 10.1.11: Seien $f,\ g : R \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f \le g$, dann gilt:

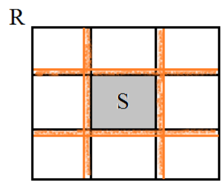
(a) $\overline{\int_R} f(x)dV(x) \le \overline{\int_R} g(x)dV(x)$
$\underline{\int_R} f(x)dV(x) \le \underline{\int_R} g(x)dV(x)$

(b) Falls f, g integrierbar sind $\int_R f(x)dV(x) \le \int_R g(x)dV(x)$

Definition: Ist $E \subseteq \mathbb{R}^d$, dann heißt $X_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ charakteristische Funktion[4] von E

Beispiel: Seien R, S Rechtecke mit $S \subset R \ \rightsquigarrow \ \int_R X_S(x)dV(x) = V(S)$

Beweis:



10.2 Jordan-Mengen

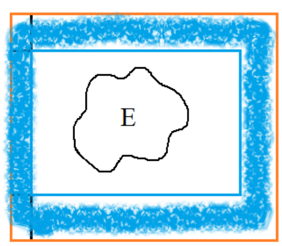
Definition: 10.2.1.: Für $E \subset R \subset \mathbb{R}^d$ heißt

(a) $\overline{V}(E) = \overline{\int_R} X_E(x)dV(x)$ äußeres Volumen

(b) $\underline{V}(E) = \underline{\int_R} X_E(x)dV(x)$ inneres Volumen

(c) Falls X_E integrierbar: $V(E) = \int_R X_E(x)dV(x)$ heißt Volumen

Im Fall (c) heißt E Jordan-Menge.



Eigenschaften des Volumens

Satz 10.2.3.: Seien $E,\ F$ beschränkte Mengen mit $E \subset F \subset \mathbb{R}^d$, dann gilt $\underline{V}(E) \le \underline{V}(F)$, $\overline{V}(E) \le \overline{V}(F)$, falls $E,\ F$ Jordan-Mengen sind: $V(E) \subset V(F)$

Beweis: $X_E \le X_F$ ■

Satz 10.2.4.: $E,\ F,\ E \cap F$ seien Jordan-Mengen mit $V(E \cap F) = 0$. Dann gilt $V(E \cup F) = V(E) + V(F)$.

Beweis: $X_{E \cup F} = X_E + X_F - X_{E \cap F}$ ■

Satz 10.2.5.: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$, dann gilt: $\overline{V}(E) = \overline{V}(\overline{E})$ und $\underline{V}(E) = \underline{V}(E^\circ)$.

Beweis: $E \subseteq R,\ P = \{R_1, \dots, R_n\},\ \overline{E} \subseteq F \ \rightsquigarrow \ U(X_E, P) = V(F)$ mit $F = U \cdot \{R_j : E \cap R_j \neq \emptyset\}$ ist abgeschlossen als endliche Vereinigung abgeschlossener Rechtecke $\Rightarrow \overline{V}(E) \le \overline{V}(\overline{E}) \le \overline{V}(F) = V(F) = U(X_E, P)$, $\overline{V}(E) \le \overline{V}(\overline{E}) \le \overline{V}(E)$

[4] Indikator-Funktion

zweite Behauptung analong $\blacksquare$

Satz 10.2.6.: Ist E eine Jordan-Menge, so gilt $V(E) = V(\overline{E}) = V(E^\circ)$

Mengen mit Nullvolumen

Satz 10.2.7.: Sei E eine beschränkte Menge mit $\overline{V}(E) = 0 \Rightarrow E$ Jordanmenge mit $V(E) = 0$, dann gilt:

- Jede Teilmenge einer Jordanmenge mit Nullvolumen ist selbst Jordanmenge mit Nullvolumen
- Endliche Vereinigungen von Jordanmengen mit Nullvolumen sind Jordanmengen mit Nullvolumen

Satz 10.2.8.: Sei E eine Menge, dann gilt $\overline{V}(E) = 0 \Leftrightarrow\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \{R_1, \ldots, R_n\} : E \subset \cup_{j=1}^n R_j$ und $\sum\limits_{j=1}^n V(R_j) < \epsilon$

Beweis: $'' \Rightarrow ''$

Sei $\overline{V}(E) = 0 \Rightarrow\ \exists\ R : E \subset R^\circ,\ \exists\ P$ von $R : U(X_E, P) < \epsilon$, das heißt $\sum\limits_{R_k \cap E \neq \emptyset} V(R_k) < \epsilon$ mit $E \subset \cup_{R_k \cap E \neq \emptyset}$

$'' \Leftarrow ''$

Sei $E \subset F = \cup_{j=1}^n R_j$ mit $\sum\limits_{j=1}^n V(R_j) < \epsilon \Rightarrow \overline{V}(F) < \epsilon$, da $X_F \leq \sum\limits_{j=1}^n X_{R_j}$ $\ X_{R_j}$ integrierbar auf R_j

$\overline{V}(F) = \bar{\int\limits_R} X_F(x) dV(x) \leq \bar{\int\limits_R} X_{R_j}(x) dV(x) \leq \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_R X_{R_j}(x) dV(x) = \sum\limits_{j=1}^n V(R_j) < \epsilon$ $\blacksquare$

Eine Charakterisierung von Jordanmengen

Satz 10.2.9.: Sei E eine beschränkte Menge $\Rightarrow E$ Jordanmenge $\Leftrightarrow V(\partial E) = 0$

Beweis: Sei P eine Zerlegung von $R \Rightarrow \{R_j\}$

$L(X_{E^\circ}, P) = \sum\limits_{R_j \subset E^\circ} V(R_j),\ U(X_{\overline{E}}, P) = \sum\limits_{R_j \subset \overline{E} \neq \emptyset} V(R_j) \Rightarrow U(X_{\overline{E}}, P) - L(X_{E^\circ}, P) = U(X_{\partial E}, P)$, das heißt sei $\{P_n\}$ eine Folge von Zerlegungen. Dann gilt: $lim\ U(X_{\partial E}, P_n) = 0 \Leftrightarrow lim(U(X_{\overline{E}}, P_n) - L(X_{E^\circ}, P_n)) = 0$

$\overline{V}(\overline{E}) - \underline{V}(E^\circ) = \overline{V}(E) - \underline{V}(E)$

Somit folgt $\underline{V}(E) = \overline{V}(E) \Leftrightarrow \overline{V}(\partial E) = 0$, das heißt E Jordanmenge $\Leftrightarrow \partial E$ Menge mit Nullvolumen $\blacksquare$

Satz 10.2.10.: Seien A, B Jordanmengen $\Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash (A \cap B)$ sind Jordanmengen

Außerdem gilt

- $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$
- $V(A \backslash (A \cap B)) = V(A) - V(A \cap B)$

Beweis: $\partial(A \cup B),\ \partial(A \cap B),\ \partial(A \backslash (A \cap B)) \leq \partial A \cup \partial B$

A, B Jordanmengen $\Rightarrow \partial A, \partial B$ Nullvolumen-Mengen $\Rightarrow \partial A \cup \partial B$ besitzt Nullvolumen, nach Satz 10.2.7. jede Teilmenge einer Nullvolumen-Menge ist Nullvolumen-Menge $\Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash (A \cap B)$ sind Jordanmengen

Zweite Behauptung folgt direkt aus $X_{A \cup B} = X_A + X_B - X_{A \cap B}$

$X_{A \backslash (A \cap B)} = X_A - X_{A \cap B}$ $\blacksquare$

Beispiel: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig.

Zeige: Graph $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in K\}$ ist Menge mit Nullvolumen

Lösung: K kompakt $\Rightarrow K$ beschränkt $\Rightarrow\ \exists\ R \subset \mathbb{R}^{d-1} : K \subseteq R$

Sei $W = V(R),\ K$ kompakt, f stetig $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta < 0 :\mid f(x) - f(y) \mid < \frac{\epsilon}{W}$ wenn $\|x - y\| < \delta$

Sei P Zerlegung von R $diam$[5]$(R_j) < \delta\ \forall\ j$

[5] Durchmesser

Sei $R_1, \ldots, R_n$ Liste der $R_K : R_K \cap K \neq \emptyset$ mit $m_j = min\{f(x),\ x \in K \cap R_j\},\ M_j = max\{f(x),\ x \in K \cap R_j\} \Rightarrow G(f) \subset \cup_j (R_j \cdot [m_j, M_j])$ und Summe der Volumen von $R_j \cdot [m_j, M_j]$ ist kleiner ϵ : $\sum\limits_j V(R_j) \cdot (M_j - m_j) \leq \frac{\epsilon}{W} \rightsquigarrow \sum V(R_j) \leq \frac{\epsilon}{W} \cdot W = \epsilon$
Nach Satz 10.2.8. ist $G(f)$ eine Menge mit Nullvolumen ■

10.3 Das Integral über eine Jordanmenge

Ein Existenztheorem

Satz 10.3.1.: Sei f beschränkte Funktion auf R und sei die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Menge mit Nullvolumen $\Rightarrow f$ integrabel auf R

Beweis: Sei E Menge der Unstetigkeitsstellen in R : $V(E) = 0 \Rightarrow \overline{V}(E) = 0 \Rightarrow\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists$ Zerlegung P von $R : U(X_E, P) < \frac{\epsilon}{4 \cdot M}$ $(M = sup\ \mid f \mid)$

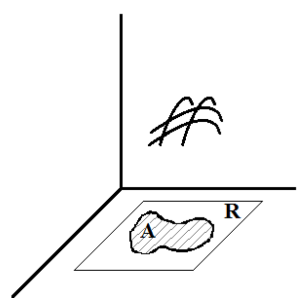
Sei $A = \cup_{R_j \cap E \neq \emptyset} R_j \Rightarrow V(A) = U(X_E, P) < \frac{\epsilon}{4 \cdot M},\ B = \cup_{R_j \cap E = \emptyset} \Rightarrow R = A \cup B$ ist abgeschlossen, beschränkt $\Rightarrow$ kompakt, f stetig auf $B \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf $B \Rightarrow\ \exists\ \delta > 0 :\mid f(x) - f(y) \mid < \frac{\epsilon}{2 \cdot V(R)}$ wenn $\|x - y\| < \delta$

Wähle Verfeinerung Q von P : $\forall\ j = 1, \ldots, n : diam(R_j) < \delta$ für jedes $R_j \subseteq A$ oder $R_j \subseteq B$

Seien $S := \{j \in \mathbb{N},\ j \in [1, n]\ R_j \subset A\}$ und $T := \{j \in \mathbb{N},\ j \in [1, n]\ R_j \subset B\}$

$\Rightarrow U(f, Q) - L(f, Q) = \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - m_j) V(R_j) = \sum\limits_{j \in S} \cdots + \sum\limits_{j \in T} \leq 2 \cdot M \cdot V(A) + \frac{\epsilon}{2 \cdot V(R)} \cdot V(B) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ Satz 10.1.7. liefert Behauptung ■

Definition: Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $f_A : R \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$. Dann ist $\int\limits_A f(x) dV(x) = \int\limits_R f_A(x) dV(x)$, wobei R ein Rechteck $A \subset R$ ist.



Satz 10.3.5.: Falls A eine Jordanmenge ist und $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist f_A integrierbar, falls die Menge E an denen f unstetig ist Volumen $V(E) = 0$ erfüllt.

Beweis: $V(E) = 0,\ V(\partial A) = 0 \Rightarrow V(E \cup \partial A) = 0$

f_A ist stetig auf $R \backslash (E \cup \partial A) \Rightarrow f_A$ ist integrierbar ■

Eigenschaften des Integrals

Satz 10.3.6.: Sei A eine Jordanmenge und $f,\ g$ integrierbar $\Rightarrow f \cdot g$ integrierbar.

Beispiel: Wenn A Jordanmenge ist, $B \subset A$ Jordanmenge und $f : A \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow f_B = f \cdot X_B$ integrierbar

Satz 10.3.8.: Sei A eine Jordanmenge, $f,\ g$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

(a) $\int\limits_A 1 dV = V(A)$

(b) $\int\limits_A (f(x) + g(x)) dV(x) = \int\limits_A f(x) dV(x) + \int\limits_A g(x) dV(x)$

(c) $\int\limits_A c \cdot f(x) dV(x) = c \cdot \int\limits_A f(x) dV(x)$

Satz 10.3.9.: Seien A, B Jordanmengen mit $V(A \cap B) = 0$, $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt $\int\limits_{A \cup B} f(x)dV(x) = \int\limits_{A} f(x)dV(x) + \int\limits_{B} f(x)dV(x)$

Satz 10.3.10.: Sei A eine Jordanmenge und $f,\ g$ integrierbar mit $f(x) \leq g(x) \quad x \in A$, dann gilt $\int\limits_{A} f(x)dV(x) \leq \int\limits_{A} g(x)dV(x)$

Integrale und Folgen

Satz 10.3.11.: Sei A eine Jordanmenge und $\{f_n\}$ eine Folge integrierbarer Funktionen. Falls f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist f integrierbar und es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{A} f_n(x)dV(x) = \int\limits_{A} f(x)dV(x)$

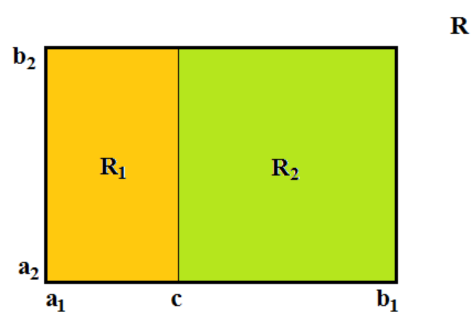
Beweis: o.B.d.A. $A = R$

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N : \mid f(x) - f_n(x) \mid < \frac{\epsilon}{V(R)} \quad x \in R,\ n \geq N$

$f_n(x) - \frac{\epsilon}{V(R)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{V(R)}$

$$\underbrace{\int\limits_{R} (f_n(x) - \frac{\epsilon}{V(R)})dV(x)}_{\int\limits_{R} f_n(x)dV(x) - \epsilon} \leq \underline{\int\limits_{R}} f(x)dV(x) \leq \overline{\int\limits_{R}} f(x)dV(x) \leq \underbrace{\int\limits_{R} (f_n(x) + \frac{\epsilon}{V(R)})dV(x)}_{\int\limits_{R} f_n(x)dV(x) + \epsilon} \quad \blacksquare$$

10.4 Iterierte Integrale



Lemma 10.4.1.: Sei $R = R_1 \cup R_2$, genauer $R = [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_d, b_d]$, $R_1 = [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_j, c] \cdot \dots \cdot [a_d, b_d]$ und $R_2 = [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [c, b_j] \cdot \dots \cdot [a_d, b_d] \quad 1 \leq j \leq d$ und sei f eine beschränkte Funktion auf R, dann gilt:

$\underline{\int\limits_{R}} f(x)dV(x) = \underline{\int\limits_{R_1}} f(x)dV(x) + \underline{\int\limits_{R_2}} f(x)dV(x)$, analog für die Oberintegrale.

Beweis: P sei eine Partition, o.B.d.A. "c zur Partition dazunehmen", das heißt $P = P_1 \cup P_2$ mit P_1 Partition für R_1 und P_2 Partition für $R_2 \Rightarrow L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2) \quad \blacksquare$

Notation: $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,\ d = p + q$ und $R = S \times T$

Satz 10.4.2.: Sei $f(x, y)$ eine beschränkte Funktion auf R, dann gilt:

$$\underline{\int\limits_{S \times T}} f(x,y)dV(x,y) \leq \underline{\int\limits_{S}}(\underline{\int\limits_{T}} f(x,y)dV(y))dV(x) \leq \overline{\int\limits_{S}}(\overline{\int\limits_{T}} f(x,y)dV(y))dV(x) \leq \overline{\int\limits_{S \times T}} f(x,y)dV(x,y)$$

Beweis: $P \times Q$ sei eine Partition von $S \times T$; $P = \{S_i\}_{i=1}^{n},\ Q = \{T_j\}_{j=1}^{m}$

$P \times Q = \{S_i \times T_j\}_{i=1,\ j=1}^{n,\ m}$

$M_{ij} = \sup\limits_{S_i \times T_j} f \quad m_{ij} = \inf\limits_{S_i \times T_j} f$

$x \in S_i \quad m_{ij}V(T_j) \leq \underline{\int\limits_{T_j}} f(x,y)dV(y) \leq \overline{\int\limits_{T_j}} f(x,y)dV(y) \leq M_{ij}V(T_j)$

$$m_{ij} \underbrace{V(T_j)V(S_i)}_{=V(T_j \times S_i)} \leq \underline{\int\limits_{S_i}} \underline{\int\limits_{T_j}} f(x,y)dV(y)dV(x) \leq \overline{\int\limits_{S_i}} \overline{\int\limits_{T_j}} f(x,y)dV(y)dV(x) \leq M_{ij} \underbrace{V(S_i)V(T_j)}_{=V(S_i \times T_j)}$$

$L(f, P \times Q) \leq \underline{\int\limits_{S}} \underline{\int\limits_{T}} f(x,y)dV(y)dV(x) \leq \overline{\int\limits_{S}} \overline{\int\limits_{T}} f(x,y)dV(y)dV(x) \leq U(f, P \times Q) \quad \blacksquare$

Bemerkung: Satz 10.4.2. gilt analog für vertauschte Reihenfolge der $x,\ y$-Integrationen.

Satz 10.4.3. (Satz von Fubini): Sei $f(x, y)$ eine beschränkte Funktion auf R mit f integrierbar. Es gilt $\int\limits_{S \times T} f(x,y)dV(x,y) =$

$\underline{\int\limits_S}\underline{\int\limits_T} f(x,y)dV(y)dV(x) = \overline{\int\limits_S}\overline{\int\limits_T} f(x,y)dV(y)dV(x)$

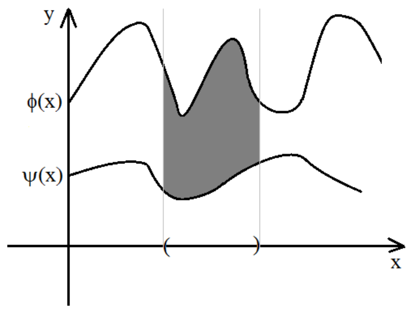
Falls zusätzlich $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar für alle $x \in S$, dann ist auch $x \mapsto \int\limits_T f(x,y)dV(y)$ integrierbar und es gilt $\int\limits_{S\times T} f(x,y)dV(x,y) = \int\limits_S\int\limits_T f(x,y)dV(y)dV(x)$.

Satz 10.4.5. (Satz von Fubini): Sei $f(x,y)$ eine beschränkte Funktion auf R, so dass $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar für $y \in T$ und $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar für $x \in S$ ist. Dann gilt $\int\limits_{S\times T} f(x,y)dV(x,y) = \int\limits_S(\int\limits_T f(x,y)dV(y))dV(x) = \int\limits_T(\int\limits_S f(x,y)dV(x))dV(y)$

Beispiel:

$\int\limits_{[0,1]\times[0,\sqrt{\pi}]} y^3 \cdot sin(x\cdot y)dV(x,y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} y^3\cdot sin(x\cdot y)dydx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 y^3\cdot sin(x\cdot y)dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} y^3\cdot[-\frac{cos(x\cdot y)}{y}]_0^1 dy =$

$= \int\limits_0^{\pi} y^2[-cos(y)+1]dy = \cdots = \frac{\pi}{2}$



Satz 10.4.7.: Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : x \in B$ und $\psi(x) \le y \le \phi(x)\}$, A, B seien Jordanmengen und kompakt, ψ, ϕ stetig und f integrierbar. Dann gilt $\int\limits_A f(x,y)\ dV(x,y) = \int\limits_B \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)\ dydV(x)$, falls $f(x,y)$ integrierbar ist bezüglich y auf $[\psi(x), \phi(x)]$ für alle $x \in B$.

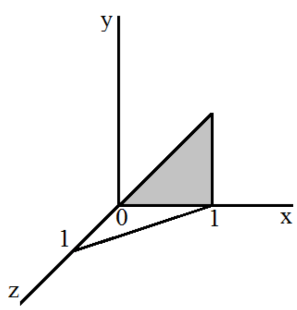
Satz 10.4.8.: Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : x \in B$ und $\psi(x) \le y \le \phi(x)\}$, A, B seien Jordanmengen und kompakt, ψ, ϕ und f stetig. Dann ist auch $g(x) = \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,t)\ dt$ stetig für alle $x \in B$. Weiters gilt $\mid f(x,t) \mid \le M$ auf A, da A kompakt und f stetig ist.

Beweis (Skizze): $\mid g(x) - g(x_0) \mid = \mid \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,t)\ dt - \int\limits_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} f(x_0,t)\ dt \mid = \mid \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,t)\ dt - \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x_0)} f(x,t)\ dt \mid + \mid \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x_0)} f(x,t)\ dt - \int\limits_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} f(x,t)\ dt \mid + \mid \int\limits_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} f(x,t)\ dt - \int\limits_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} f(x_0,t)\ dt \mid = \mid \int\limits_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} f(x,t)\ dt \mid + \mid \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x_0)} f(x,t)\ dt \mid + \mid \int\limits_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} (f(x,t) - f(x_0,t))\ dt \mid \le$

$M\cdot \mid \phi(x) - \phi(x_0) \mid + M\cdot \mid \psi(x) - \psi(x_0) \mid + \int\limits_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} \mid f(x,t) - f(x_0,t) \mid dt \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0 \quad \blacksquare$

Satz 10.4.9.: Seien $f,\ \phi_j, \psi_j$ stetig und $A : \begin{cases} \psi_1 \le x_1 \le \phi_1 \\ \psi_2(x_1) \le x_2 \le \phi_2(x_1) \\ \vdots \\ \psi_d(x_1,\ldots,x_{d-1}) \le x_d \le \phi_d(x_1,\ldots,x_{d-1}) \end{cases}$. Dann gilt $\int\limits_A f(x)\ dV(x) = \int\limits_{\psi_1}^{\phi_1}\int\limits_{\psi_2(x_1)}^{\phi_2(x_1)} \ldots \int\limits_{\psi_d(x_1,\ldots,x_{d-1})}^{\phi_d(x_1,\ldots,x_{d-1})} f($

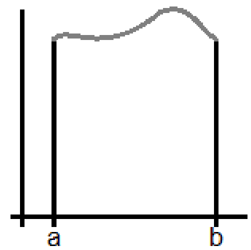
Beispiel: $\int\limits_A x\cdot y\cdot z\ dV(x,y,z),\ A = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 1 - x^2\}$



$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x^2} x \cdot y \cdot z \; dzdydx = \int_0^1 \int_0^x \underbrace{\frac{x \cdot y \cdot z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x^2}}_{\frac{x \cdot y \cdot (1-x^2)^2}{2}} dydx = \int_0^1 \frac{x \cdot (1-x^2)^2 \cdot y^2}{4} \Bigg|_0^x dx = \ldots = \frac{1}{96}$$

10.5 Transformationsformel

Motivation: $\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \; dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \; du, \; u = g(t), \; du = g' dt$



$\int f(t) \; dt = lim \sum_j f(t_j) \; \Delta t_j$

$\Delta t_j = t_j - t_{j-1} \quad u = g(t), \; \Delta u = g(t_j) - g(t_{j-1}), \; u_j = g(t_j), \; t_j = g^{-1}(u_j) \quad \rightsquigarrow \quad \int f(t) \; dt = lim \sum_j f(t_j) \Delta t_j = lim \sum \left[f(g^{-1}(u_j)) \frac{\Delta t_j}{\Delta u_j} \right] \Delta u_j = \int f(g^{-1}(u)) \frac{1}{g'} \; du$

$\frac{t_j - t_{j-1}}{g(t_j) - g(t_{j-1})} = \Delta u_j$

$g(t) = g(t_0) + g'(t_0) \cdot (t - t_0) + \ldots$

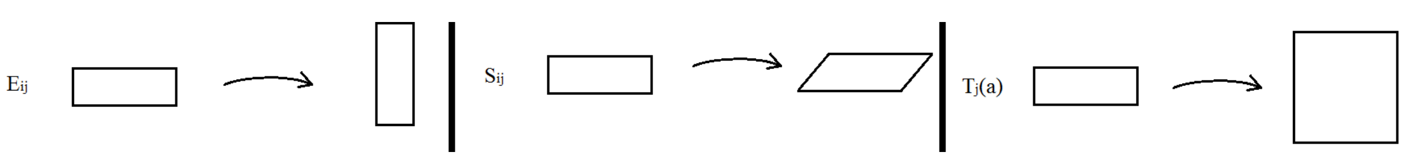
Fragen:

1. Wie ändert sich das Volumen bei linearen Transformationen?
   (i) E_{ij} Austausch der i-ten und j-ten Zeile (Volumen ändert sich nicht)
   (ii) S_{ij} Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile (Volumen ändert sich nicht)
   (iii) $T_i(a)$ Multiplikation der i-ten Zeile mit $a \in \mathbb{R}$ (Volumen und Determinante werden um den Faktor a skaliert)

(1) $E_{ij} \qquad E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $S_{ij} \qquad S_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $T_j(a) \qquad T_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$



Bemerkung: $E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \; T_j(a)^{-1} = T_j(\frac{1}{a}), \; S_{ij}^{-1} = \tilde{S}_{ij}$ mit $S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Satz 10.5.1.: Jede nicht-singuläre Matrix lässt sich als Produkt von Matrizen $T_j(a), \; E_{ij}, \; S_{ij}$ schreiben.

Satz 10.5.2.: $det\ E_{ij} = -1,\ det\ T_j(a) = a,\ det\ S_{ij} = 1$

Erinnerung/Korollar: $det\ (A \cdot B) = det\ A \cdot det\ B$

Satz 10.5.3: $E_{ij},\ S_{ij}$ bilden Jordanmengen auf Jordanmengen gleichen Volumens ab.

Bemerkung: $T_j(a)$ bildet ebenfalls Jordanmengen auf Jordanmengen ab, jedoch ändert sich das Volumen um den Faktor a.

Beweis (nur S_{ij}): Sei A eine Jordanmenge und R ein Rechteck mit $A \subset R$. Sei $P = \{R_1, \dots, R_n\}$ eine Partition. Dann $E = \cup\{R_k : R_k \subset A\}$ und $F = \cup\{R_k : R_k \cap A \neq \emptyset\}$

$U(X_A, P) = V(F),\ L(X_A, P) = V(E) \Rightarrow \exists\ P : V(F) - V(E) < \epsilon$, wobei $V(E) \leq V(A) \leq V(F)$ gilt.

$S_{ij}F$ ist die Vereinigung aller $S_{ij}R_k$ mit $R_k \cap A \neq \emptyset$ und es gilt $V(S_{ij}R_k) = V(R_k) \Rightarrow V(S_{ij}F) = V(F)$. Analog $V(S_{ij}E) = V(E)$

$V(E) = V(S_{ij}E) \leq \underline{V}(S_{ij}A) \leq \overline{V}(S_{ij}A) \leq V(S_{ij}F) = V(F) \Rightarrow \overline{V}(S_{ij}A) - \underline{V}(S_{ij}A) < \epsilon\ \ \forall\ \epsilon \Rightarrow \overline{V}(S_{ij}A) = \underline{V}(S_{ij}A)$ ■

Satz 10.5.4.: Sei $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear. Dann bildet L Jordanmengen auf Jordanmengen ab und es gilt

$V(L \cdot A) = |\ det\ (L)\ | \cdot V(A)$

Beispiel: Fläche einer Ellipse

Einheitskreis $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Ellipse

Glatte Bilder von Rechtecken "$\phi(R)$"

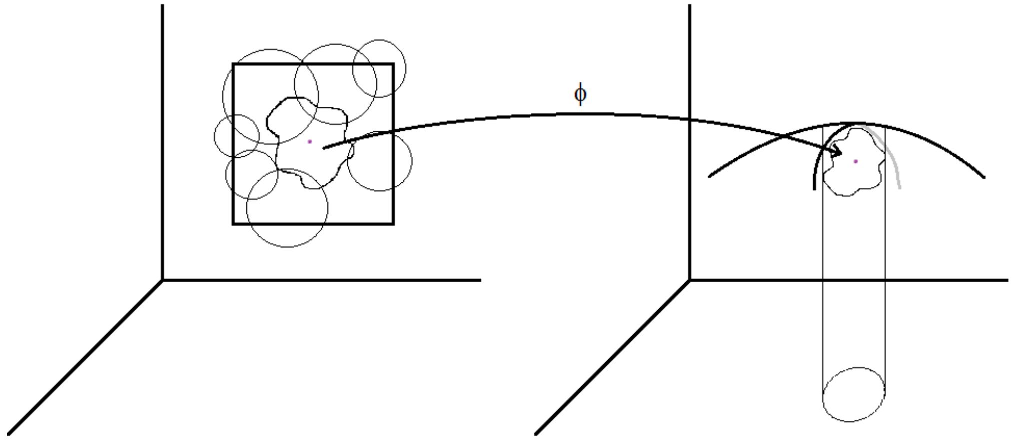
Satz 10.5.7.: $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ injektiv mit $d\phi$ nicht-singulär auf U. Falls R ein entartetes Rechteck[6] im $\mathbb{R}^d$ ist, so gilt $V(\phi(R)) = 0$.

Beweis:

(i) Sei R kompakt. In der Umgebung jeden Punktes von R kann der Inverse-Funktionen-Satz angewendet werden. Endlich viele Umgebungen überdecken $R \Rightarrow$ Es reicht eine dieser Umgebungen zu betrachten
o.B.d.A.: Umgebung von 0 und $\phi(0) = 0 \quad d\phi(0) = \mathbb{1}$ (Betrachte $\tilde{\phi}(x) = (d\phi(0))^{-1} \cdot \phi(x)$)

[6] $V(R) = 0$

(ii) Folgendes gilt: $\phi(0) = 0,\ d\phi(0) = \mathbb{1},\ \tilde{\phi}(x) = d\phi^{-1}(0) \cdot \phi(x)\ \ d\tilde{\phi}(0) = \mathbb{1}$



$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}$

$g : U \cap \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^{p-1} \to \underset{=g(v)}{\mathbb{R}^{p-1}}\ \ \ g(x) = (\phi_1(x, 0), \ldots, \phi_{p-1}(x, 0))$

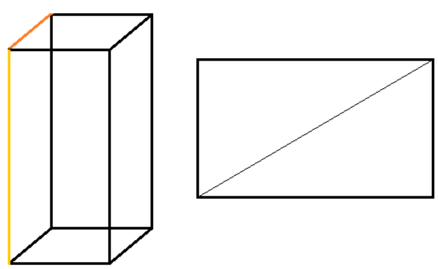
$dg(0) = \mathbb{1}_{p-1} \Rightarrow \phi(g^{-1}(x), 0) = (x, \phi_p \circ g^{-1}(x))$

$\phi(u) = \{(x, \phi_p \circ g^{-1}(x)) : x \in W\}$ $\phi(u)$ kann als Graph einer glatten Funtkion auf $\mathbb{R}^{p-1}$ geschrieben werden $\Rightarrow$ $V(\phi(u)) = 0$. ■

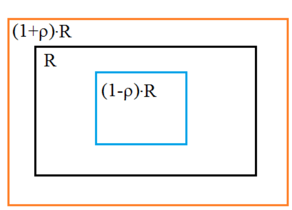
Satz 10.5.8.: Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^p$ mit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}$. Für ein Rechteck R ist $\phi(R)$ eine Jordanmenge.

Beweis: ∂R ist eine endliche Vereinigung von entarteten Rechtecken $\Rightarrow V(\phi(\partial R)) = 0$. Außerdem gilt $\phi(\partial R) = \partial\phi(R)$ da ϕ offene Mengen auf offene Mengen und abgeschlossene Mengen auf abgeschlossenen Mengen abbildet. ■

Lemma 10.5.9.: Seien $\lambda, K > 0$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$ mit U offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^p$ bijektiv und glatt. Weiters sei $d\phi(a)$ nicht-singulär und $0 <\mid det\ d\phi(a) \mid\leq K$ für alle $a \in U$. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, so dass für jedes Rechteck R mit Durchmesser kleiner δ, und das Verhätlnis zwischen größter und kleinster Seitenlänge größer λ ist, folgendes gilt: $\mid V(\phi(R) - V(d\phi(a)R) \mid< \epsilon \cdot V(R)$ mit $a =$ Mittelpunkt von R



Beweis: o.B.d.A.: $a = 0,\ \phi(0) = 0,\ 0 <\mid det\ d\phi(0) \mid\leq K$. Sei $0 < \rho < 1$ mit $(1 + \rho) \cdot R =$ Rechteck das aus R entsteht, wenn alle Seiten symmetrisch um den Faktor ρ verlängert werden. Analog $(1 - \rho) \cdot R$.

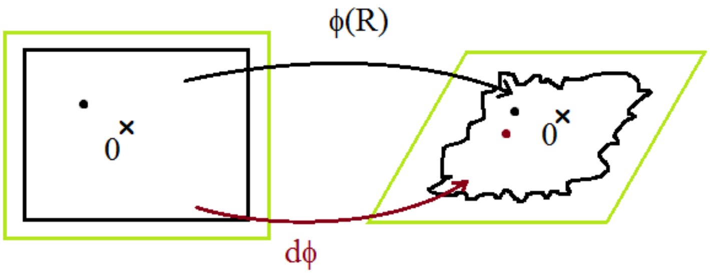


$(1 - \rho) \cdot R \subset R \subset (1 + \rho) \cdot R\ \rightsquigarrow\ (1 - \rho) \cdot d\phi(0)R \subset d\phi(0)R \subset (1 + \rho) \cdot d\phi(0)R$

$V((1+\rho)\cdot d\phi(0)R) - V((1-\rho)\cdot d\phi(0)R) = ((1+\rho)^d - (1-\rho^d)) \cdot \underbrace{V(d\phi(0)R)}_{=|d\phi(0)|\cdot V(R)} \leq 2\cdot\rho\cdot d\cdot\underbrace{(1+\rho)}_{\leq 2^{d-1}}\cdot\underbrace{\mid det\ d\phi(0) \mid}_{\leq K}\cdot V(R) \leq 2^d\cdot\rho\cdot dK\cdot V(R)$

Wähle $\rho = \frac{\epsilon}{2^d \cdot dK} \Rightarrow V((1+\rho)\cdot d\phi(0)R) - V((1-\rho)\cdot d\phi(0)R) \leq \epsilon \cdot V(R)$, es reicht $(1-\rho)\cdot d\phi(0)R \subset \phi(R) \subset (1+\rho)\cdot d\phi(0)R$ zu zeigen

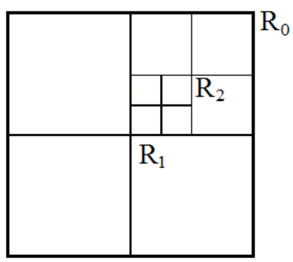
Bemerkung: A sei eine nicht-singuläre Matrix $\|x\| = \|A^{-1}\cdot A\cdot x\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|A\cdot x\| \Rightarrow \|A\cdot x\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\cdot\|x\| \Rightarrow L$ Liniensegment, dann ist die Länge von $d\phi(0)L$ mindestens $\frac{1}{\|d\phi(0)^{-1}\|}$ mal der Länge von $L \Rightarrow$ der Abstand von $d\phi(0)R$ zum Komplement von $(1+\rho)\cdot d\phi(0)R$ mindestens $\frac{1}{\|d\phi(0)^{-1}\|}\cdot\rho\cdot r$, wobei r die Hälfte der kleinsten Seitenlänge von R ist. Weiters gilt für δ genügend klein, dass $\|\phi(x) - d\phi(0)\cdot x\| \leq A\cdot\rho\cdot\lambda\cdot\underbrace{\|x\|}_{<\delta} < A\cdot\rho\cdot r \Rightarrow \phi(x) \in (1+\rho)\cdot d\phi(0)R$ Analog $(1-\rho)\cdot d\phi(0)R \subset \phi(x)$ ■



Satz 10.5.10.: Sei $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ glatt mit U offen, $d\phi^{-1}$ nicht-singulär, injektiv, $R \subset U$ Rechteck, f stetig auf $\phi(R)$, dann gilt $\int\limits_{\phi(R)} f(u)\ dV(u) = \int\limits_R f(\phi(x))\cdot \mid det\ d\phi(x) \mid dV(x)$ entspricht Koordinatenwechsel $u = \phi(x)$

Beweis: $S \subset R$ seien Rechtecke und $\Delta(S) = \int\limits_{\phi(S)} f(u)\ dV(u) - \int\limits_S f(\phi(x))\cdot \mid det\ d\phi(x) \mid dV(x)$, $Q(S) = \frac{\Delta(S)}{V(S)}$, mit a_j der Mittelpunkt von R_j.

Sei h der Durchmesser von R. Wir konstruieren $R = R_0 \supset R_1 \supset \ldots$ absteigende Folge von Rechtecken R_i mit dem Durchmesser $\frac{h}{2^i}$ und $\mid Q(R_i) \mid \geq \mid Q(R) \mid$



Halbiere alle Seitenlängen bis mindestens ein Teilrechteck R_i die gewünschte Eigenschaft $\mid Q(R_i) \mid \geq \mid Q(R) \mid$ hat. $\mid \Delta(R_j) \mid = \mid \int\limits_{\phi(R_j)} f(u)\ dV(u) - \int\limits_{R_j} f(\phi(x))\cdot \mid det\ d\phi(x) \mid dV(x) \mid \leq \mid \int\limits_{\phi(R_j)} f(\phi(a_j))\ dV(u) - \int\limits_{R_j} f(\phi(a_j))\cdot \mid det\ d\phi(a_j) \mid dV(x) \mid + \int\limits_{\phi(R_j)} \mid f(u) - f(\phi(a_j)) \mid dV(u) + \int\limits_{R_j} \mid f(\phi(x))\cdot \mid det\ d\phi(x) \mid - f(\phi(a_j))\cdot \mid det\ d\phi(a_j) \mid\mid dV(x)$

$\mid \Delta(R_j) \mid \leq \mid f(\phi(a_j)) \mid \cdot \underbrace{\mid V(\phi(R_j)) - V(d\phi(a_j)R_j) \mid}_{\leq \epsilon V(R_j)} + \underbrace{\sup_{u\in\phi(R_j)} \mid f(u) - f(\phi(a_j)) \mid}_{\leq \epsilon \text{ für } \delta \text{ klein genug da } f \text{ stetig}} \cdot V(\phi(R_j)) +$
$+ \underbrace{\sup_{x\in R_j} \mid f(\phi(x))\cdot \mid det\ d\phi(x) \mid - f(\phi(a_j))\cdot \mid det\ d\phi(a_j)) \mid}_{\leq \epsilon \text{ für } \delta \text{ klein genug da } f \text{ stetig}} \cdot V(d\phi(a_j)R_j) \Rightarrow \frac{|\Delta(R_j)|}{|V(R_j)|} \leq 3\cdot\epsilon \Rightarrow \mid Q(R_j) \mid \leq 3\cdot\epsilon$ für δ klein $\Rightarrow$ $Q(R) \leq Q(R_j) \leq 3\cdot\epsilon$ mit ϵ beliebig $\Rightarrow Q(R) = 0$ ■

Satz 10.5.10. gilt analog für kompakte bzw. offene Jordanmengen anstelle von R.

Beispiel: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) = (r\cdot cos\theta, r\cdot sin\theta)$

$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} cos(x^2+y^2)\ dydx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 cos(r^2)\cdot r\ drd\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 cos(r^2)\cdot 2\cdot r\ drd\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(r^2)\mid_0^1\ d\theta = \frac{sin(1)}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

11 Vektoranalysis

11.1 1-Form und Wegintegrale

Erste Dimension: Kurven und Integration von 1-Formen über Kurven.

Glatte Kurven

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ und γ' im Inneren von I: $\gamma'(t) = \lim\limits_{s \to t} \frac{\gamma(s)-\gamma'(t)}{s-t}$ mit $\gamma = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_d(t)),\ \gamma'(t) = \gamma_1'(t), \ldots, \gamma_d'(t))$.

Definition 11.1.1.: Eine Kurve γ ist glatt, wenn $\gamma'(t)$ im Inneren von I beschränkt und stetig ist. Die Spur einer Kurve auf I ist das Bild $\gamma(I)$ in $\mathbb{R}^d$. Eine Kurve liegt in $E \subseteq \mathbb{R}^d$, wenn die Spur in E liegt.

Beispiel: Finde eine glatte Kurve, deren Spur eine direkte Linie von u zu v ist.

$\gamma(t) = u + t \cdot (v - u),\ t \in [0, 1]$

$\gamma'(t) = v - u,\ \gamma(0) = u,\ \gamma(1) = v$

Stückwese glatte Kurven-Wege

Definition 11.1.3.: Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ eine Kurve. γ ist stückweise glatt, wenn es eine Zerlegung von I in $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ existiert, sodass $\forall\ j\ \gamma$ auf $[t_{j-1}, t_j]$ eine glatte Kurve ist. γ wird dann Weg genannt. Für einen Weg γ existiert γ' mit γ' stetig und beschränkt auf $I \backslash \{t_0, \ldots, t_n\}$

Beispiel: Finde einen Weg entlang des Quadrates $(0, 0),\ (0, 1),\ (1, 1),\ (1, 0)$, welches entgegen des Uhrzeigersinns verläuft. Bestimme γ' in den Teilintervallen.

$$I = [0, 1] \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (4{\cdot}t{,}0) & 0{\le}t{\le}\frac{1}{4} \\ (1{,}4{\cdot}t{-}1) & \frac{1}{4}{\le}t{\le}\frac{1}{2} \\ (3{-}4{\cdot}t{,}1) & \frac{1}{2}{\le}t{\le}\frac{3}{4} \\ (0{,}4{-}4{\cdot}t) & \frac{3}{4}{\le}t{\le}1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma$ ist stetig auf $[0, 1]$, glatt in den Teilintervallen und bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn

$\gamma' = (4, 0),\ (0, 4),\ (-4, 0),\ (0, -4)$

Geschlossene Wege

Kurve geschlossen: $\gamma(a) = \gamma(b),\ [a, b]$ ist das Intervall

Weglänge

Definition 11.1.6.: Die Länge eines Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ ist $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma^2(t)\| dt$

Beispiel: Weglänge von $\gamma(t) = (2 \cdot t^3, 3 \cdot t^3)$ für $t \in [0, 1]$

$\gamma'(t) = (6 \cdot t^2, 6 \cdot t),\ \|\gamma'(t)\| = \sqrt{36 \cdot t^4 + 36 \cdot t2} = 6 \cdot t \cdot \sqrt{t^2 + 1}$

$l(\gamma) = 6 \int\limits_0^1 +\sqrt{t^2 + 1}\ dt = 3 \int\limits_1^2 \sqrt{u}\ du = 2 \cdot u^{-\frac{3}{2}}\ |_1^2 = 2 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} - 1)$

Differential 1-Form

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p,\ F : U \to \mathbb{R}^q$ eine differenzierbare Funktion $\Rightarrow dF(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist eine lineare Transformation $dF = L \in \mathbb{R}^{q \times p}$

$f : I \to \mathbb{R},\ df(x) = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \in \mathbb{R}^{1 \times d}$

Schreibweise: $df = \frac{df}{dx_1} dx_1 + \frac{df}{dx_2} dx_2 + \cdots + \frac{df}{dx_d} dx_d$

Die Differential-1-Form ist eine stetige Funktion, die jedem Punkt $x \in E$ eine lineare Funktion $\phi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zuweist. Da

dx_j eine Basis des Vektorraumes solcher Funktionen ist, gilt: $\phi = \phi_1 \cdot dx_1 + \cdots + \phi_d \cdot dx_d$, wobei ϕ_j stetige reellwertige Funktionen sind, z.B.: $E \subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow a = f \cdot dx + g \cdot dy$ mit f, g stetig.

Beispiel: Gradient: $\phi_j = \frac{df}{dx_j}$

Integration entlang eines Weges

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ein Weg und $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_d' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times 1}$

Schreibe: $d\gamma(t) = \gamma'(t)dt$. Sei $\phi : U \to \mathbb{R}$ 1-Form und $U \supset Spur(\gamma) \Rightarrow \phi(\gamma(t))$ wirkt auf $d\gamma(t)$ durch Matrixmultiplikation und erzeugt eine reelle Zahl $\phi(t) \cdot d\gamma(t) = \phi_1 \cdot d\gamma_1 + \cdots + \phi_d \cdot d\gamma_d$

Diese Funktion ist beschränkt auf $[a,b]$ und stetig, außer an endlich vielen Punkten $\Rightarrow$ integrabel.

Das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung des Weges und heißt Wegintegral.

Definition 11.1.9.: Sei ϕ eine $d\gamma$ 1-Form, stetig, definiert auf $A \subseteq \mathbb{R}^d,\ \gamma : [a,b] \to A$.

Weg $\Rightarrow \int\limits_\gamma \phi = \int\limits_a^b \phi(\gamma(t))\ d\gamma(t) = \int\limits_a^b \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int\limits_a^b \sum\limits_{j=1}^d \phi_j(\gamma(t)) d\gamma_j \cdot \gamma'(t)\ dt = \int\limits_a^b \sum\limits_{j=1}^d \phi_j(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$

Idee: $x_j = \gamma_j(t),\ dx_j = \gamma_j'(t)\ dt$

$\int\limits_\gamma \phi_1(x) \cdot dx_1 + \cdots + \phi_d(x) \cdot dx_d = \int\limits_a^b \phi_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \cdots + \phi_d(\gamma(t)) \cdot \gamma_d'(t)\ dt$

Beispiel: Finde $\int\limits_\gamma y\ dx + x\ dy$ und $\int\limits_\lambda y\ dx + x\ dy$ mit $\gamma = (1 + 2 \cdot t, 1 + 3 \cdot t)\ \ 0 \leq t \leq 1,\ \lambda = (1 + 2 \cdot t^2, 1 + 3 \cdot t^2)\ \ 0 \leq t \leq 1$

$\gamma : x = 1 + 2 \cdot t\ \ dx = 2\ dt,\ y = 1 + 3 \cdot t,\ dy = 3\ dt$

$\int\limits_\gamma y\ dx + x\ dy = \int\limits_0^1 (1 + 3 \cdot t) \cdot 2 + (1 + 2 \cdot t) \cdot 3\ dt = \int\limits_0^1 (5 + 12 \cdot t) \cdot 1 \cdot t = 11$

$\lambda : x = 1 + 2 \cdot t^2,\ dx = 4 \cdot t\ dt,\ \ y = 1 + 3 \cdot t^2,\ dy = 6 \cdot t\ dt$

$\int\limits_\lambda = \int\limits_0^1 (1 + 3 \cdot t^2) \cdot 4 \cdot t + (1 + 2 \cdot t^2) \cdot 6 \cdot t\ dt = \int\limits_0^1 24 \cdot t^3 + 10 \cdot t\ dt = 11$

Fundamentalsatz der Vektoranalyse

Satz 11.1.10.: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ Weg, f differenzierbare Funktion auf $U \supset \gamma(I) \Rightarrow \int\limits_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Beweis: Sei γ eine glatte Kurve. $\int\limits_\gamma df = \int\limits_a^b df(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) = \int\limits_a^b d(f \circ \gamma)(t) = \int\limits_a^b (f \circ \gamma)'(t)\ dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ ■

Einfache Wege und glatte einfache Wege

$\gamma(I)$ einfach $\Leftrightarrow$

(i) $s \neq t \Rightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$ mit $s, t \in I$ und $s \wedge t \notin \partial I$

(ii) γ' existiert und $\gamma'(t) = 0$ nur in endlich vielen Punkten von I°

(i) $\Rightarrow$ injektiv, geschlossene Kurve ist jedoch erlaubt.

(ii) $\Rightarrow \gamma$ besitzt Tangenten überall außer an endlich vielen Punkten $x_j \in I^\circ$

Einfach geschlossener Weg ist geschlossen und einfach, z.B. Kreis der einmal durchlaufen wird.

Eine einfache glatte Kurve γ ist eine einfache Kurve, die glatt ist und $\gamma'(t) \neq 0\ \forall\ x \in I^\circ \Rightarrow T(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ ist dort definiert.

11.2 Variablentransformation

- Ist $\int\limits_\gamma$ abhängig von der Parametrisierung oder ist nur die Spur entscheident?
- Beschreibung von Wegen und 1-Formen abhängig von Koordinatensystemen, d.h. durch Änderung des Koordinatensystems ändert sich die Darstellung der Kurve. Wie wird die Darstellung der 1-Form geändert, sodass das Integral das gleiche bleibt?

Parameterunabhängig

Integral einer 1-From über Weg unabhängig von der Parametrisierung.

Definition: Seien γ, λ glatte Kurven in $\mathbb{R}^d$ mit Intervallen $[a,b],\ [c,d]$. Sei $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ stetige, surjektive und glatte Ableitung, mit nicht verschwindende Ableitung auf (c,d). Sei $\lambda = \gamma \circ \alpha$, dann ist α ein glatter Parameterwechsel von γ zu λ. Wenn $\alpha' > 0$ auf $(c,d) \Rightarrow \alpha$ ist orentierungserhaltend, falls $\alpha' < 0$ auf $(c,d) \Rightarrow \alpha$ ist orientierungsumkehrend. Bemerkung: $\gamma'(t) \neq 0\ \forall\ t \in [c,d] \Rightarrow \alpha'$ entweder größer oder kleiner Null auf $(c,d) \Rightarrow \alpha$ entweder steigend oder fallend auf $[c,d]$ bzw. streng monoton.

Satz 11.2.2.: Seien λ, γ glatte Kurven in $\mathbb{R}^d$ definiert auf $[a,b]\ [c,d]$ und α ein glatter Parameterwechsel von γ zu $\lambda \Rightarrow \int\limits_\lambda \phi = \pm \int\limits_\gamma \phi$ für alle 1-Formen $\phi = \phi_1 \cdot dx_1 + \cdots + \phi_d \cdot dx_d$, definiert auf $U \supseteq \lambda(I)$

Beweis: Sei α orientierungserhaltend, $s = \alpha(t),\ ds = \alpha'(t)dt$

$d\lambda(t) = d\gamma(\alpha(t)) \cdot d\alpha(t) = \gamma'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\ dt$

$\int\limits_\lambda \phi = \int\limits_c^d \phi(\lambda(t)) \cdot d\lambda(t) = \int\limits_c^d \phi(\gamma(\alpha(t))) \cdot \gamma'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\ dt = \int\limits_a^b \phi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\ ds = \int\limits_\gamma \phi$

α orientierungsumkehrend $\Rightarrow$ Schritt 4: $\int\limits_b^a = -\int\limits_a^b = -\ldots$ ■

Satz 11.2.2.: Wenn α orientierungserhaltend ist, dann sind λ und γ äquivalent.

Definition 11.2.3.: Wenn λ, γ Wege mit gleicher Spur sind und $\int\limits_\gamma \phi = \int\limits_\lambda \phi$ für jede 1-Form ϕ definiert auf γ und λ, dann sind γ und λ sind äquivalente Wege.

Bemerkung: Seien λ, γ Wege. Sei α ein glatter Parameterwechsel (Parametertransformation) von γ zu $\lambda \Rightarrow\ \exists\ \alpha^{-1} : [a,b] \to [c,d]$ und α^{-1} ein glatter Parameterwechsel von λ zu γ.

Beispiel: Gibt es einen glatten Parameterwechsel von γ zu λ und umgekehrt mit $\gamma(t) = (1 + 2 \cdot t, 1 + 3 \cdot t)\ \ 0 \leq t \leq 1,\ \lambda(t) = (1 + 2 \cdot t^2, 1 + 3 \cdot t^2)\ \ 0 \leq t \leq 1$?

$\alpha(t) = t^2$ ist steigend und $\lambda = \gamma \circ \alpha,\ \alpha'$ ist beschränkt auf $(0,1)$. Der Parameterwechsel von λ zu γ ist: α^{-1} mit $\alpha(5) = \sqrt{5}$.

Hier: Ableitung nicht beschränkt auf $(0,4)$, aber auch keine Voraussetzung.

Beispiel: Sei $\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ \lambda(t) = (\cos t, -\sin t)\ \ 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$

Gibt es einen glatten Parameterwechsel von γ zu λ? Sind λ und γ äquivalent?

Beide Wege durchlaufen den Einheitskreis $B_1(0,0)$, aber in verschiedenen Richtungen.

$\alpha = 2 \cdot \pi - t$ ist ein glatter Parameterwechsel von γ zu λ, da $\cos(2 \cdot \pi - t) = \cos t,\ \ \sin(2 \cdot \pi - t) = -\sin t$.

α ist orientierungsumkehrend $\Rightarrow \lambda, \gamma$ nicht äquivalent.

Zeige dies mit $\phi(x,y) = -y\ dx + x\ dy$

Auf $\gamma : x = \cos t,\ dx = -\sin t\ dt$

$y = \sin t,\ dy = \cos t\ dt$

$\Rightarrow \int\limits_\gamma \phi = \int\limits_0^{2\cdot\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int\limits_0^{2\cdot\pi} 1\ dt = 2 \cdot \pi$

Auf $\lambda : x = \cos t,\ dx = -\sin t$

$y = -\sin t,\ dy = -\cos t\ dt$
$\int\limits_\lambda \phi = \int\limits_0^{2\cdot\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t\ dt = \int\limits_0^{2\cdot\pi} -1\ dt = -2\cdot\pi$
Satz 11.2.2. liefert Strategie für viele Wege mit gleicher Spur. Angenommen die Intervalle können in n Teilintervalle zerlegt werden, so dass für $j = 1,\dots,n$ γ und λ in j-ten Teilintervall einen glatten orientierungserhaltenden Parameterwechsel α_j besitzen. Falls dies möglich ist $\Rightarrow \int\limits_\gamma \phi = \int\limits_\lambda \phi$ für alle 1-Formen ϕ mit $\phi : U \to \mathbb{R},\ U \supseteq Spur(\gamma) \Rightarrow$ Wege äquivalent[7]
Satz 11.2.7.: Seien λ, γ zwei einfache, glatte nicht geschlossene Kurven, die die gleichen Anfangs- und Endpunkte besitzen und die gleiche Spur $\Rightarrow$ Es existiert ein orientierungserhaltender glatter Parameterwechsel von γ zu λ.

(i) injektiv

(ii) $\gamma' = 0$ an endlich vielen Punkten, $\gamma \in C^1 \Rightarrow \gamma' \neq 0\ \forall\ x \in I^\circ$

Beweis: $[a,b],\ [c,d]$
$\forall\ t \in [c,d]\ \exists\ s \in [a,b] : \lambda(t) = \gamma(s)$ (gleiche Spur)
γ injektiv $\Rightarrow\ \exists!\ s$ mit $s = \alpha(t) \Rightarrow \alpha : [c,d] \to [a,b]$ mit $\lambda(t) = \gamma(\alpha(t))$
Zeige: α besitzt stetige positive Ableitungen auf (c,d)
Wähle $F(s,t) = \lambda(t) - \gamma(s) \Rightarrow F$ glatte Funktion mit $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^d$
z.z.: Sei $t_0 \in (c,d) \Rightarrow\ \exists\ \alpha(t)$ in $U(t_0)$ und ist stetig in t_0
Sei $s_0 = \alpha(t_0),\ \gamma'(s) \neq 0 \Rightarrow\ \exists\ j : \frac{\partial t_j}{\partial s} \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$
$\Rightarrow\ \exists$ ein glattes $\beta : U(t_0)$ mit $\beta(t_0) = s_0,\ f_j(s,t) = 0$ für $(s,t) \in U(s_0,t_0) \Leftrightarrow s = \beta(I)$
Da $F(\alpha(t),t) = 0\ \forall\ t \in [c,d]$ ist $f_j(\alpha(t),t) = 0 \Rightarrow \beta(t) = \alpha(t)$ in $U(t_0) \Rightarrow \alpha$ glatt in einer Umgebung von t_0
z.z.: $\alpha' \neq 0$
$\lambda'(t) = \gamma'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$
Annahme: $\exists\ t : \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \lambda'(t) = 0\ \lightning \Rightarrow \alpha$ glatte Parametertransformation
$\alpha' \neq 0 \Rightarrow \alpha$ fallend oder steigend, da $\alpha(c) = a,\ \alpha(d) = b \Rightarrow$ steigend $\Rightarrow$ orientierungserhaltend ■

Bogenlängen Parametrisierung

Sei γ eine glatte Kurve mit Intervall $[a,b]$, dann ist die Variablentransformation folgendermaßen definiert: $s(t) = \int\limits_a^t \|\gamma'(u)\| du\ \ \forall\ t \in [a,b]$, das heißt $s(t)$ ist Länge $l(\gamma)$ auf $[a,t] \Rightarrow ds = \|\gamma'(t)\| dt,\ \|\gamma'(t)\|$ stetige, positive Funktion $\Rightarrow s(t)$ ist stetige, steigende Funktion $\Rightarrow s : [a,b] \to [0, l(\gamma)]$ glatt auf $[a,b]$
$\Rightarrow s^{-1} : [0, l(\gamma)] \to [a,b]$ ist steigende stetige Funktion, glatt auf $(0, l(\gamma))$
$\Rightarrow$ glatter Parameterwechsel von γ zu $\lambda(s) = \gamma(t(s))$
Länge der Kurve wird durch glatten Parameterwechsel nicht geändert. $\Rightarrow$ Das heißt mit $s \in [0, l(\gamma)]$, wobei $l(\lambda)$ mit $I = [0,s]$ und $l(\gamma)$ mit $\tilde{I} = [a,t]$, das heißt $\int\limits_a^t \|\gamma'(u)\| du = s$
Eine glatte Kurve oder Weg mit dieser Eigenschaft ist parametriesiert durch die Bogenlänge.
Satz 11.2.9.: Jeder Weg in $\mathbb{R}^d$ kann umparametrisiert werden, so dass er durch die Bogenlänge parametrisiert ist.
$\int\limits_a^t \|\gamma'(u)\| du = s$ angewandt auf $\lambda :\ s = \int\limits_0^s \|\lambda'(t)\| dt,\ \frac{d}{ds} \Rightarrow 1 = \|\lambda'(s)\| \Rightarrow$ das heißt $\lambda'(s)$ ist Einheitsvektor
Schreibe T Einheitsvektor zu γ, T bezüglich $\gamma :\ T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ und $\lambda(s) = \gamma(t(s))$
$\lambda'(s) = \gamma'(t) \cdot \frac{dt}{ds},\ \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| = \gamma' \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$

[7] tr=Spur

Klassische Form der Wegintegrale

Sei $\phi = f_1 \cdot dx_1 + \cdots + f_p \cdot dx_p$ 1-Form auf $A \subseteq \mathbb{R}^p$ und γ einfacher Weg auf A mit Spur C, dann gilt $F = (f_1, \ldots, f_p)$ mit $\int\limits_\gamma \phi \; d\gamma = \int\limits_C F \cdot T \; ds = \int\limits_a^b F(\gamma(t)) \cdot T(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \; dt = \int\limits_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \; dt$, wobei $\gamma' = (\gamma_1' ... \gamma_a')$

Physikalische Anwendung: F ist z.B. ein Kraftfeld, das auf ein Objekt wirkt $\Rightarrow \int \ldots$ entspricht der Arbeit des Feldes bei Bewewgung des Objektes entlang des Weges.

Notation stellt das Integral einer 1-Form als Integral einer gewöhnlichen Funtkion $F \cdot T$ bezüglich Bogenlänge dar.

Definition: Sei $f : \underbrace{A}_{C(\gamma)} \to \mathbb{R}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$. Definiere $\int\limits_C f \; ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \; dt$ "Integral von f über C nach der Bogenlänge".

Variablentransformation für 1-Formen

Glatte injektive Funktion $U \to V$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und nichtsingulärem Differential.

Allgemein: $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $H : U \to \mathbb{R}^q$ glatte Funktion (nicht zwingend injektiv) H kann glatter Parameterwechsel sein oder z.B. Funktion, die Teile einer p-Fläche in $\mathbb{R}^d$ parametrisiert

Idee: Nutze Wissen darüber wie Funktion, Wege und Differentialformen durch H transformiert werden, um Integration auf komplexen Gebieten auf einfache Quadrate oder Kegel zurückzuführen.

Das gleiche zuvor bei Integration einer 1-Form über einem Weg durch Integration einer Funktion über Linie.

$\int\limits_\gamma \phi = \int\limits_a^b \sum\limits_{j=1}^n \phi_j(\gamma_j(t)) \cdot \gamma_j'(t) \; dt$. Sei $\gamma : I \to U, \; f : H(U) \to \mathbb{R}, \; U \subseteq \mathbb{R}^p$, offen, $H : U \to \mathbb{R}^q$ glatt, dann ist $H \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^q$ ein Weg in $\mathbb{R}^q$ und $f \circ H : U \to \mathbb{H}$, schreibe $H^*(f) = f \circ H$

Dabei gilt: $\gamma \mapsto H \circ \gamma$ Wege in $\mathbb{R}^p \to$ Wege in $\mathbb{R}^q, \; f \mapsto H^*(f)$ Funktion in $\mathbb{R}^q \to$ Funktion auf $\mathbb{R}$

Beziehung: Einerseits $H^*(f) \cdot \gamma$ ist eine reellwertige Funktion auf I, andererseits ist $H^* \cdot \gamma = (f \circ H) \circ \gamma = f \circ (H \circ \gamma)$, das heißt f ist definiert auf Kurven $H \circ \gamma$

Transformation der 1-Formen durch H : Sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, df eine vektorwertige Funktion und $H^*(f) = f \circ H$, dann: $(df \circ H) \cdot dH \Rightarrow$ fasse dies als Transformation von df unter H auf $\Rightarrow$ dies motiviert, dass H jede differenzierbare 1-Form auf diese Weise transformiert.

Definition 11.2.10.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $H : U \to \mathbb{R}^q$ glatt. Für jede Funktin (0-Form) f auf $H(U)$, 1-Form ϕ auf $H(U)$ definieren Funktion H^*f, 1-Form $H^*\phi$ auf U als $H^*f = f \circ H, \; H^*(\phi) = (\phi \circ H) \cdot dH$

Beispiel 11.2.11. Sei $H : U \to \mathbb{R}^3$ glatte Funktion, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Sei $(x, y, z) = H(u, v)$ und $\phi(x, y, z) = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ 1-Form

Schreibe: $H^*\phi$ in (u, v)

$$H^*(\phi) = (\phi \circ H) \cdot dH = (f \circ H, g \circ H, h \circ H) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} =$$

$= (f \circ H \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + y \circ H \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + h \circ H \cdot \frac{\partial z}{\partial u}, \; f \circ H \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + y \circ H \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + h \circ H \cdot \frac{\partial z}{\partial v}) \Rightarrow$ Basisform

$(f \circ H \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + g \circ H \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + h \circ H \cdot \frac{\partial z}{\partial u}) \cdot du + (f \circ H \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + g \circ H \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + h \circ H \cdot \frac{\partial z}{\partial v}) \cdot dv$

Bemerkung: 1-Form $\phi = f \cdot dx + g \cdot dy + h \cdot dz$ wird durch die Funktion $U \to \mathbb{R}^3$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$) transformiert mit: Ersetze $(x, y, z) = H(u, v)$ für $f(x, y, z), \; g(x, y, z), \; h(x, y, z)$ und ersetze

- $dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv$
- $dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv$

- $dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv$

Gleicher Ansatz für Transformation von 1-Formen von $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ unter $H : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Wenn $p = q = 1 :\ \frac{df(u)}{dv} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv}$

Beispiel: Sei $H(r, \theta) = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta)$ für $r > 0,\ \ -\pi < \theta < \pi$

Transformation: $x = r \cdot \cos\theta,\ y = r \cdot \sin\theta$. Berechne $H^*\phi$ für 1-Form $\phi(x, y) = x \cdot dx + y \cdot dy$

$dx = \cos\theta\ dr - r \cdot \sin\theta\ d\theta,\ dy = \sin\theta\ dr + r \cdot \cos\theta\ d\theta \Rightarrow H^*\phi = r \cdot \cos^2\theta\ dr - r^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta\ d\theta + r \cdot \sin^2\theta\ dr + r^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta\ d\theta = r \cdot (\cos^2 + \sin^2) dr = r \cdot dr$

Satz 11.2.14.: Sei $H : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ glatt, ϕ 1-Form und $\gamma : I \to U$ Weg. Dann gilt $\int\limits_{\gamma} H^*(\phi) = \int\limits_{H \circ \gamma} \phi$

Beispiel: $\phi = x \cdot dx + y \cdot dy,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ \ -\pi \leq t \leq \pi$

$H : x = r \cdot \cos\theta,\ y = r \cdot \sin\theta;\ dx = \cos\theta \cdot dr - r \cdot \sin\theta \cdot d\theta,\ dy = \sin\theta \cdot dr + r \cdot \cos\theta \cdot d\theta \Rightarrow dH = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & r \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = dH \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix};\ \gamma(t) = (1, t),\ \lambda = H \circ \gamma \Rightarrow \int\limits_{\lambda} (x \cdot dx + y \cdot dy) = \int r \cdot \cos\theta \cdot (\cos\theta \cdot dr - r \cdot \sin\theta \cdot d\theta) + r \cdot \sin\theta \cdot (\sin\theta \cdot dr + r \cdot \cos\theta \cdot d\theta) = \int\limits_{1}^{1} r \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\ dr = 0$

11.3 Differentialformen höherer Ordnung

$dx_j \wedge$ [8] $dx_i = dx_i \wedge dx_j$ mit $1 \leq i, j \leq d$ und $dx_i \wedge dx_i = 0$

$\begin{pmatrix} d \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{d \cdot (d-1)}{2} \ \rightsquigarrow\ d = 3 :\ dx \wedge dy,\ dx \wedge dz,\ dy \wedge dz$

Definition: 2-Form

$\phi(x) = \sum\limits_{i<j} f_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j$

Definition: Dachprodukt von 1-Formen

$\phi = \sum\limits_{i} f_i \cdot dx_i \quad \psi = \sum\limits_{j} g_j \cdot dx_j \Rightarrow \phi \wedge \psi = (\sum\limits_{i} f_i \cdot dx_i) \wedge (\sum\limits_{j} g_j \cdot dx_j) = \sum\limits_{i,j} (f_i \cdot dx_i) \wedge (g_j \cdot dx_j) = \sum\limits_{ij} f_i \cdot g_j \cdot dx_i \wedge dx_j = \sum\limits_{i<j} (f_i \cdot g_j - f_j \cdot g_i) \cdot dx_i \wedge dx_j$

Satz: Seien ϕ, ψ, θ 1-Form und f 0-Form, dann gilt

(a) $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$

(b) $\phi \wedge (\theta + \psi) = \phi \wedge \theta + \phi \wedge \psi$

(c) $f \cdot (\phi \wedge \psi) = (f \cdot \phi) \wedge \psi = \phi \wedge (f \cdot \psi)$

[8] Spatprodukt, Dachprodukt